

## 第五章 拓樸圖論簡介

拓樸圖論 ( Topological Graph Theory ) 主要是研究如何把一個圖適當地畫在曲面 ( Surface ) 上，使得任意圖上的兩邊，除了端點之外，都沒有其它相交的點。例如： $K_4$  可以畫在球面上滿足上述的要求，而  $K_5$  就辦不到。直覺地，相對於點數，邊數較少的圖比較容易畫在較單純的曲面上，如球面或是輪胎面；而邊數較多的圖就需要畫在較複雜的曲面上。

在這一節，我們介紹圖如何可以畫在曲面上，然後解釋所謂的單純，複雜曲面。

### 1. 拓樸模式 ( Topological Model )

當我們把圖畫在曲面上，圖中的每一邊都可以看成是空間中的一條封閉曲線 ( 含頂點 )，簡稱為空間中的曲線。這裡的空間是指 3- 維歐氏空間。

**定義 1.1.** ( Space Curve )

一條連接  $u$  與  $v$  兩點的曲線可以看成是一個連續函數  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  的值域，這裡的  $f$  是 1-1 函數，而且  $f(0) = u$  以及  $f(1) = v$ ；在  $u = v$  的情況下  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  是 1-1 的函數。

所以，一條空間中的曲線，實際上就是  $\{ f(t) \mid t \in [0, 1] \}$ ，而曲線的內部是  $\{ f(t) \mid t \in (0, 1) \}$ 。現在，我們可以定義圖的拓樸模式。

**定義 1.2.** ( Topological Model )

令  $G = (V, E)$  為任意圖。 $G$  的拓樸模式是指在 3- 維空間中有  $|V|$  個點及  $|E|$  條空間曲線來對應於  $G$  中的點及邊，使對應的空間曲線內部彼此的交集都是空集合。

經由拓樸模式所畫出來的圖直接用原圖  $G$  稱之。也就是說，把一般圖  $G$  想像成是已經畫在 3- 維空間中，同時滿足拓樸模式的規定，邊與邊之間，除了端點之外其它部份皆不相交。

由於，圖要畫在曲面上，下面就對幾個基本的曲面作一簡單說明。

**定義 1.3.** ( Sphere )

一個球面是一個 3- 維歐氏空間的集合，它包含所有的點  $(x_1, x_2, x_3)$  滿足  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ ， $r$  是一個正實數。

對於一個圖能否經由拓樸模式而畫在平面上一直是研究拓樸圖論的中心課題；雖然，現在已經能夠很清楚地描述出來，然而，這一類圖一直都扮演著十分重要的角色。由於，以拓樸模式畫在平面上的圖都一定會有一個區域 ( Region ) 它是個無窮的區域；因此，在拓樸圖論中，我們將會用球面來取代平面，而這個對應現象就是著名的黎曼投影 ( Riemann Stereographic Projection )，如圖 1.1 所示。

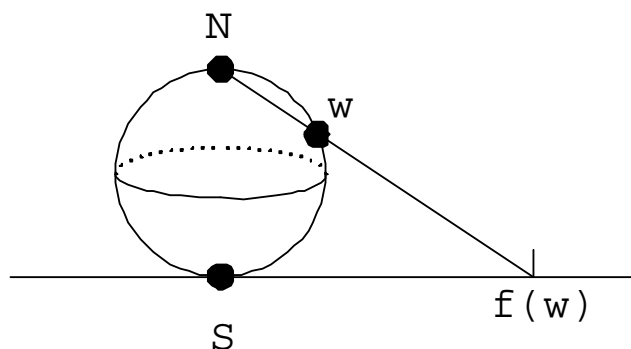


圖 1.1

於是畫在平面上的圖就可以對應到球面上，不過這時候，每個區域都是有限的區域 ( Finite Region )。

刻劃一個曲面是否為球面的最著名定理非喬丹曲線定理莫屬。

**定理 1.4.** ( Jordan Curve Theorem )

在球面 ( 或平面 ) 上的簡單封閉曲線 ( Simple Closed Curve ) 把球面 ( 或平面 ) 分隔成兩部份，也就是說在球面上 ( 或平面上 )，任意連接不同部份中兩點的曲線必然與這封閉曲線相交。

**證明.** 省略。

在這裡補充說明一下；不久以前 C. Thomassen 用圖論的方式給了定理 1.4 一個很不一樣的證明，這個努力使得圖論的發展有一個新的方向。我們期待更多代數拓樸中的重要定理會被圖論學者以不同的方式加以證明。

接下來再介紹另一個基本曲面 – 輪胎面 ( Torus )。

**定義 1.5.** ( Donut )

一個標準的甜甜圈 ( Standard Donut ) 是一個半徑為 1 的圓盤，以  $(2,0)$  為圓心，繞著  $y$  軸旋轉所得到的曲體 ( Solid )，如圖 1.2 所示。

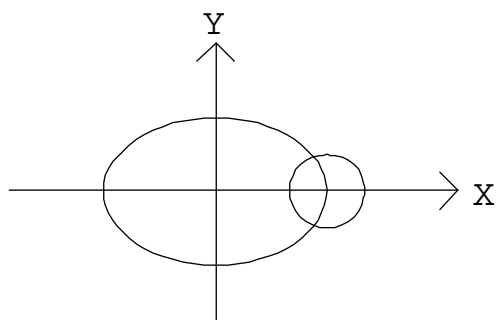


圖 1.2 : 標準甜甜圈

**定義 1.6.** ( Torus )

一個標準甜甜圈的表面稱為是輪胎面 ( Torus )。

一個輪胎面不是球面，這可以利用喬丹曲線定理加以證明：因為，在輪胎面上，我們可以找到一個簡單封閉曲線  $D$ ，它無法將輪胎面分隔成兩部份，如圖 1.3 中的  $C$  及  $D$  兩條封閉曲線。

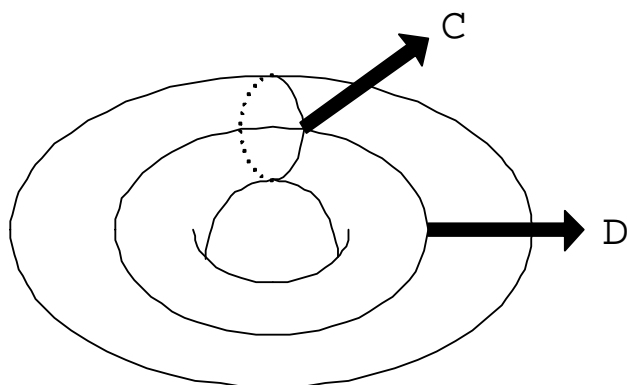


圖 1.3 : Torus

除了輪胎面之外，另一個重要的曲面是莫比斯帶 ( Mobius Band )。

**定義 1.7.** ( Mobius Band )

一個莫比斯帶是由一個長方形帶經過扭轉 ( 如圖 1.4 ) 後再連接所獲得的帶狀曲面。

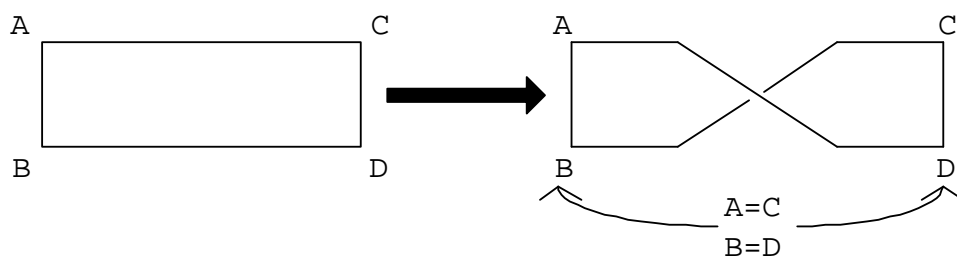


圖 1.4 : Mobius Band

**作業 1.** 在莫比斯帶  $B$  上找到一條封閉曲線，使得它無法將  $B$  分隔成兩部份。

## 2. 曲面 (Surface)

在這一節中, 我們將明確地定義曲面 (Surface) 是什麼, 同時也對於曲面的分類作進一步說明。

**定義 2.1.** (Topological Equivalence, Homeomorphism)

一個由  $X$  映至  $Y$  的連續函數  $f$  為一拓樸等價函數若且唯若  $f$  是 1-1, 映成而且  $f^{-1}$  也是連續函數, 此時  $X$  與  $Y$  稱為是拓樸等價。

**定義 2.2.** (Surface)

一個曲面 (Surface) 是指一個在 3-維歐氏空間中的一個集合, 它滿足對於集合中的每一個元素  $x$ , 都存在一個鄰域 (Neighborhood)  $N_x$ , 它與下列兩個集合之一拓樸等價:

- (a)  $D_1 = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ ,
- (b)  $D_2 = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ 。

上述定義中的  $D_1$  稱為開單位平面圓盤, 而  $D_2$  則是標準的半圓盤 (Standard half-disk)。在曲面中具有鄰域與  $D_1$  拓樸等價的點稱為是內點 (Interior point), 不然是邊界點 (Boundary Point)。

**定義 2.3.** (Boundaryless Surface)

每個點都是內點的曲面稱為無邊界曲面, 例如歐氏平面。

**定義 2.4.** (Closed Surface)

滿足下列條件的連通曲面  $S$  稱為封閉曲面:

- (a)  $S$  是有限的, 即存在一個球體  $B$ , 使得  $S \subseteq B$ 。
- (b)  $S$  是無邊界曲面。
- (c) 如果  $\{f(t) | t \in (0, 1)\} \subseteq S$ , 則  $f(0)$  及  $f(1)$  都在  $S$  中。

**命題 2.5.** 球與輪胎均為封閉曲面, 而平面與莫比斯帶則不是。

證明: (作業 2.)。

**定義 2.6.** (Non-orientable Surface)

一個曲面如果它包含了一部份 (部份曲面) 與莫比斯帶拓樸等價, 則此曲面稱為是一個不可定向的曲面。

**定義 2.7.** (Orientable Surface) 不是不可定向的曲面稱為是可定向曲面。

可定向曲面與不可定向曲面的分類是拓樸學的重要工作，在這一節，我們只要敘述這些成果而省去它的證明。

以下，我們用  $S_0$  代表球面，然後再依遞迴方式建構  $S_k$ ，它是在  $S_{k-1}$  這個曲面上再加入一個把手 (handle) 所形成的曲面，參考圖 2.1。

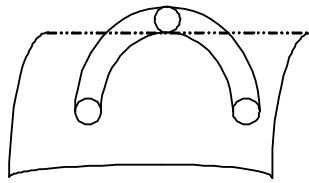


圖 2.1 : 加 Handle

**定理 2.8.** (Gross 及 Tucker) (可定向封閉曲面的分類)

每一個可定向封閉曲面必定和  $S_0, S_1, S_2, \dots$  之一的曲面拓樸等價。

於是，一個封閉曲面的虧格 (Genus) 就由它所等價的  $S_k$  所決定，亦即虧格是  $k$ 。所以球面的虧格是 "0"，而輪胎面的虧格是 "1"。在另一方面，不可定向封閉曲面的分類也可利用加入跨蓋 (Crosscap) 的方式獲得。

首先，定義球面 ( $S_0$ ) 為  $N_0$ ，也就是說開始建構的基礎一樣；再利用莫比斯帶，如圖 2.2，將它接在  $N_{k-1}$  的一個圈上即得  $N_k$ ；加入的管稱為是跨越蓋 (Crosscap)，如圖 2.2。

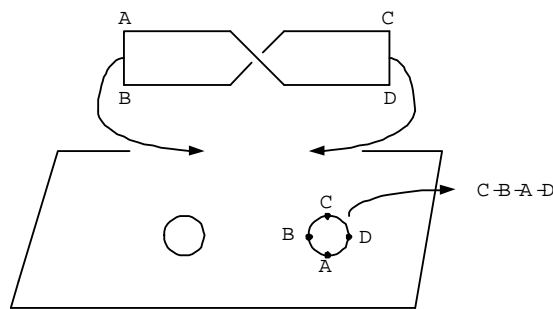


圖 2.2 : 加 Crosscap

**定理 2.9.** (Gross 及 Tucker) (不可定向封閉曲面的分類)

一個不可定向的封閉曲面必定與  $N_1, N_2, \dots$  之一拓樸等價。

同上理由, 與  $N_k$  拓樸等價的不可定向封閉曲面, 它的不可定向虧格 (Non-orientable Genus) 為  $k$ , 也就是加入跨越蓋的個數為  $k$ 。

**作業 3.** :  $N_1$  如何畫?

### 3. 曲面的多邊形表示法

從輪胎面 (Torus) 的形狀, 我們不難想到利用一長方形紙片即可做出這個曲面。如圖 3.1 所示, 首先將  $\overrightarrow{AD}$  與  $\overrightarrow{BC}$  黏合 (照箭頭的方向依序黏合)。如此一來可以得到一圓筒, 然後再將圓筒的兩側按  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  的方向依序黏合即可獲得一個輪胎面。

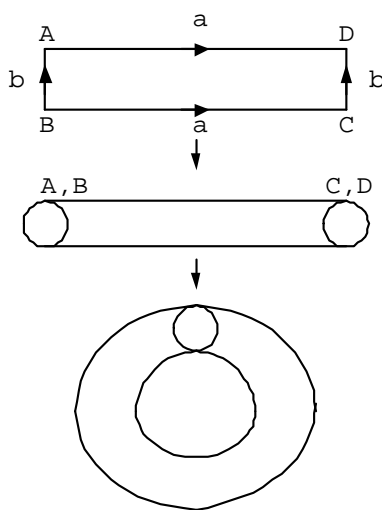


圖 3.1 : 輪胎面

現在, 以  $a$  代表  $\overrightarrow{AD}$ ,  $b$  代表  $\overrightarrow{BA}$ , 顯然  $\overrightarrow{CD}$  或  $\overrightarrow{DC}$  將會是  $b$ ,  $\overrightarrow{BC}$  或  $\overrightarrow{CB}$  將會是  $a$ , 因為我們將他們黏合。為了方便表示, 我們利用順時針方向來表示四個邊, 所以  $\overrightarrow{BA}$  是  $b$ ,  $\overrightarrow{DC}$  是同方向, 也叫它是  $b$ , 於是  $\overrightarrow{CD}$  表為  $b^{-1}$ , 同理  $\overrightarrow{BC}$  為  $a^{-1}$ ; 於是輪胎表面可以用  $bab^{-1}a^{-1}$  表示。值得注意的是這裡的 "-1" 有很重要的意義, 例如  $baba^{-1}$  就代表著非常不一樣的曲面。

如圖 3.2 所示, 黏合的方式有了很大的變化, 將  $\overrightarrow{BA}$  與  $\overrightarrow{DC}$  黏合將會製造出莫比斯帶。



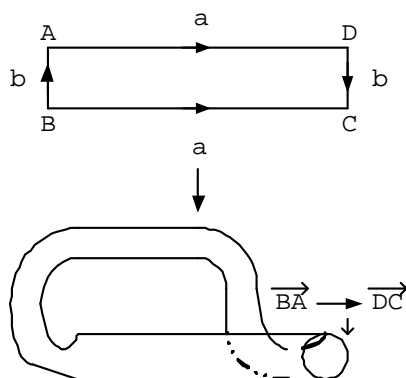


圖 3.2 : Klein 瓶

有了上述的表示, 我們可以回頭來表示  $S_0$  及  $N_1$ 。在這裡要用到 2-邊形, 如圖 3.3 顯然  $S_0(aa^{-1})$  比較容易了解, 而  $aa$  所代表的  $N_1$  就要花些力氣, 因為它們黏合方式比較特別, 如右下圖的  $w$  與  $u$  黏合。

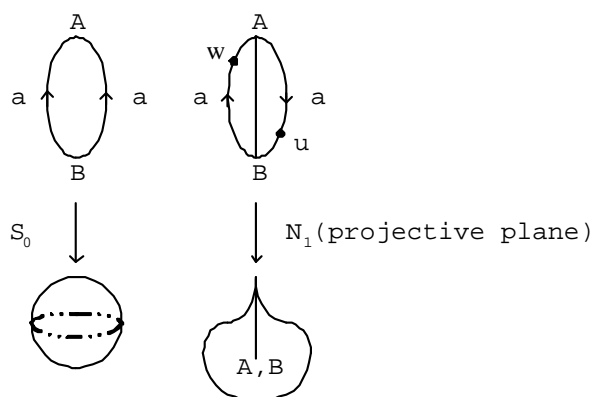
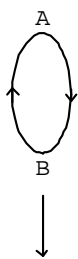
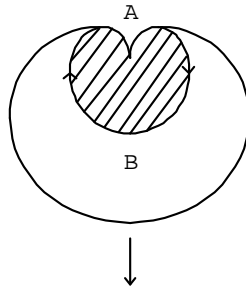


圖 3.1 :  $N_1$  與  $S_0$

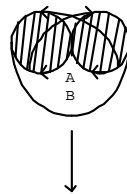
$N_1$  的獲得比較不容易了解, 以下的分解步驟說明了為何中間會出現一條折線。



將 B 往上包, 就如同要包成一個球面。



繼續向上直到 A, B 接在一起。



把兩個開口 (A, B 的兩邊) 接合起來, 兩個開口由連接方向的緣故, 逐漸變小, 而且造成自己相交而成的直線段。

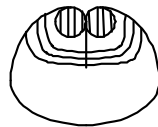


圖 3.3 的  $N_1$

圖 3.4 :  $N_1$  的形成

有了上述四種曲面的表示法,  $aa^{-1}$ ,  $aba^{-1}b^{-1}$ ,  $aa$ ,  $abab^{-1}$ ; 比較多把手 (handles) 或跨越蓋 (Crosscaps) 的曲面也可以利用這樣的形式表示出來, 只不過是它不是圖論的本題, 所以在此省略詳細的討論, 僅以兩個例子再說明它們的代表曲面。

例 1. :  $aba^{-1}cb^{-1}dc^{-1}ed^{-1}e^{-1}$ 。

這十邊形表示法是一個可定向 (Orientable) 曲面的表示法 (對於任意的  $x, x^{-1}$  也出現)。


**例 2.** :  $abacbd^{-1}c^{-1}d^{-1}$  代表一個不可向 (Non-orientable) 曲面。

**作業 4.** :  $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$  的曲面長像如何?


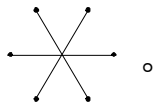
**作業 5.** :  $aba^{-1}b^{-1}$  與  $b^{-1}aba^{-1}$  是否代表同一種曲面?

## 4. 圖的正規畫法與圖的嵌入

由圖在空間的拓樸模式，我們不難發現以下三種可以避免的現象：

- (a) 兩點畫在同一個位置。
- (b) 一個邊跨越自己，.
- (c) 一個邊通過另一個不在邊上的點。

除了上述現象之外，尚有其它三種不是正規的現象：

- (d) 兩邊（端點除外）有兩點以上的交點。
- (e) 兩邊所對應的曲線相切，.
- (f) 三條邊交於一點，.

排除了上述各種現象所畫出來的圖，一般稱之為具有正規 (Normal) 畫法的圖。從現在開始，所有討論的圖都是這一類型的圖。

在畫圖中，兩個不同邊所共同使用的點（端點除外）稱為是該圖的一個**跨越 (Crossing)**。

**定義 4.1.** (圖的嵌入, Graph Embedding or Graph Imbedding)

一個圖嵌入於一個曲面  $S$  是指將  $G$  畫在曲面  $S$  上使得它**沒有任何的跨越**；也就是說，把  $G$  的拓樸模式利用一個拓樸等價 (Homeomorphism) 把它對應到  $S$  的一個子集合。

**定義 4.2.** (平面圖, Planar Graph)

一個可以嵌入在平面上的圖稱為是平面圖。

**定義 4.3.** (球面圖, Spherical Graph)

一個可以嵌入在球面上的圖稱為是球面圖。

判斷一個圖是否能畫 (嵌入) 在平面上是圖論中的一個重要課題，但是就曲面的分類而言，平面不是一種曲面，所以**平面圖**一般而言就是代表著可以嵌入於**球面的圖**；顯然，球面是一種曲面，以  $S_0$  表示。這個敘述理由來自黎曼投影 (Stereographic Projection)。

如果一個圖是平面圖，自然有一個方法可以把它畫在球面上使得任意兩邊都不會有跨越的現象發生。然而，如果它不是平面圖，那麼嵌入在球面上是不可能。以下的方法告訴我們這個圖一定可以嵌入在某一個具有把手的曲面上。首先，將這個圖畫在平面上，使得跨越的個數越少越好<sup>(\*)</sup>，然後，對於每一個跨越的地方做下列的改變 (如圖 4.1)；在跨越的地方加上一個把手。

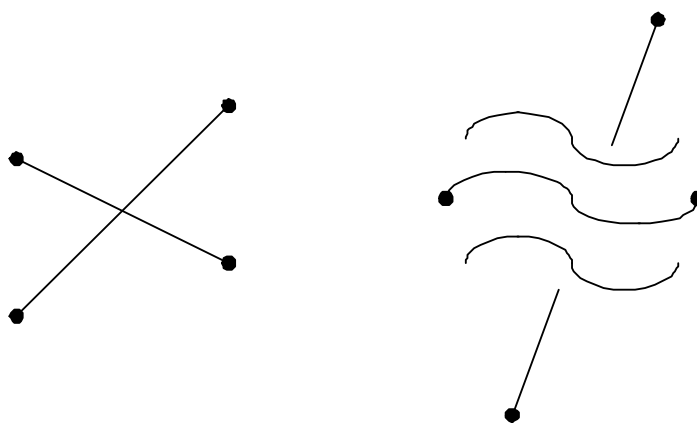


圖 4.1

所以，任意圖都可嵌入在一個曲面上；問題是如何嵌入比較”有利”？例如，<sup>(\*)</sup>所提及的跨越，如何畫才可以使得跨越的數目越少 (或越多)？另一個問題是究竟要加入多少把手”才夠”？

爲了進一步探討嵌入，圓盤嵌入 (2-cell embedding 或 Cellular embedding) 的概念是不可缺的。

#### 定義 4.4. (Region)

對應於一個把  $G$  嵌入在曲面  $S$  上，一個區域 (Region) 是指在  $S$  中把  $G$  的值域扣除之後的部份 (Component)，亦即最大的連通部份。

直觀來說，當  $G$  嵌入在  $S$  上之後，在  $S$  中拿掉  $G$  的點與邊所剩的一些部份就是區域。如果這時候每個區域都和一個開放的單位圓 (Open Disc) 拓撲等價，則這樣的嵌入稱爲是圓盤嵌入，例如圖 4.2(a)，但是圖 4.2(b) 就不是一個圓盤嵌入。

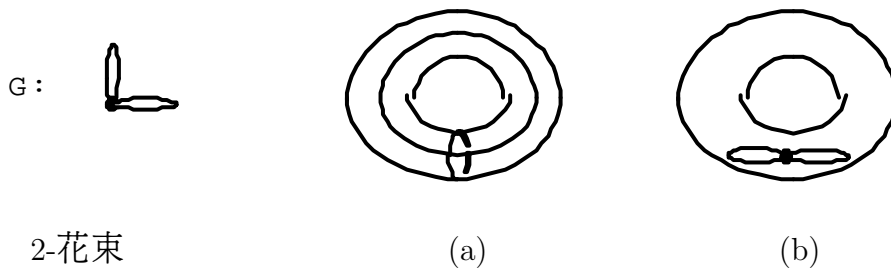


圖 4.2：輪胎面上的花束

命題 4.5. 任意不連通的圖都不可能存有圓盤嵌入。

證明.

必定存在一個區域它無法與開放圓盤拓樸等價 (?)。 ■

有了區域之後，我們可以定義一個圖嵌入的面 (Face)。

定義 4.6. (Face 及 Face Set)

一個圖嵌入中的一個區域與此區域之邊界的聯集就稱為是此圖嵌入的一個面。所有面所成的集合稱為是面集合，以  $F$  表示。若是這個面集合是把  $G$  嵌入所得到的面集合，則以  $F_G$  表示。

對於面的描述一般用它的邊界的邊順序表示 (Boundary Walk)，如圖 4.3 的例子，它的 4 個面分別是  $\langle d \rangle$  (loop)， $\langle e, g \rangle$  (兩邊形)， $\langle a, g, c \rangle$ ，及  $\langle a, b, d, b, c, e \rangle$ 。

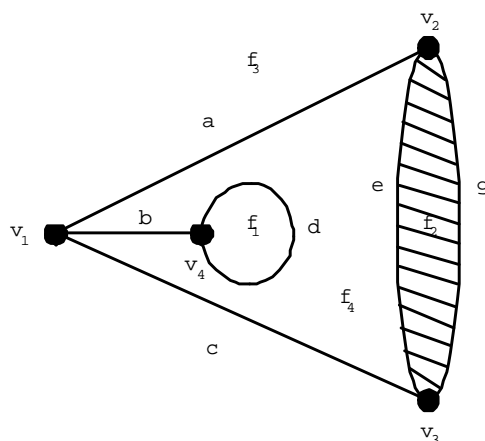


圖 4.3

這裡我們發現每個邊都會出現兩次，因為它是兩個面的邊界；不過，例子中的  $b$  顯然是例外，而這例外可以加以刻劃。

**命題 4.7.** 令  $G$  嵌入在一個平面上，同時一個邊  $e$  它兩次出現在嵌入中的一個面上，則這個邊必定是橋。

**證明.**

令  $x$  為  $e$  的內點。則以  $x$  為起點找到一條封閉曲線繞著接下來出現的邊走到再出現  $e$  時連接  $x$ ；這個封閉區線所圍的子圖將在  $e$  邊去掉之後與其他部分不連通 (?)。 ■

在這裡補充說明，上述出現兩次的邊，在適當地指定方向（繞著邊界）之後造成每個邊都出現兩次，而兩次的方向恰好相反。可以辦到的嵌入也稱為是可定向的嵌入 (Orientable Embedding)。例如圖 4.4 的例子可以將前進的方向在  $f_4$  中取逆時針，於四個面周界繞行方式如下： $f_4 = \langle v_2, v_3, v_4, v_2 \rangle$ ， $f_3 = \langle v_3, v_2, v_1, v_3 \rangle$ ， $f_2 = \langle v_3, v_1, v_4, v_3 \rangle$ ， $f_1 = \langle v_2, v_4, v_1, v_2 \rangle$ 。

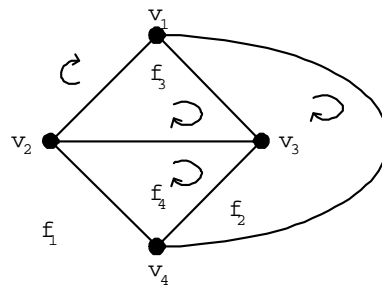


圖 4.4：  $K_4$  的嵌入

這個例子再一次說明了可定向嵌入的概念，同時由於每個有向邊都恰好出現一次，適當地嵌入  $K_n$  亦可獲得 Mendelsohn 三元系，此時  $n \equiv 0$  或  $1 \pmod{3}$ ， $n \neq 6$ 。

**作業 6.**：把  $K_6$ ， $K_7$  分別嵌入於輪胎面上。

**作業 7.**：詳細證明命題 4.7。

## 5. 尤拉公式

前面提到我們可以把在平面上的圖和畫在球面上的圖看成是一樣的圖，所以，以下所提到的平面圖 (Planar) 可以把它看成是畫在平面上或球面上，不再作進一步的區分。

**定理 5.1.** (Euler's Formula)

假如  $G$  是一個連通的平面圖而且  $G$  有  $p$  個點， $q$  個邊及  $r$  個區域，則  $p - q + r = 2$ 。

**證明.** 對  $q$  做歸納。當  $q = 1$  時，顯然  $p = 2$ ， $r = 1$ ，所以  $2 - 1 + 1 = 2$ ，公式成立。令少於  $q$  個邊的連通圖原公式成立，而  $G$  是一個具有  $q$  個邊的連通圖。首先，當  $q = p - 1$  (邊數最小的連通圖)， $G$  為一樹圖，因此  $r = 1$ ，於是  $p - q + r = p - (p - 1) + 1 = 2$ ，公式成立。接下來，如果  $q > p - 1$ ，則  $G$  中必包含一圈  $C$ ，令  $e$  為  $C$  上的一邊。現在， $G - e$  有  $q - 1$  邊，所以由歸納假設公式成立，即  $p - (q - 1) + (r - 1) = 2$ ，因此  $p - q + r = 2$ ，定理得證。 ■

**推論 5.2.** (含非連通圖)

假如  $G$  為一平面圖它具有  $k \geq 1$  個部分， $p$  個點， $q$  個邊及  $r$  個區域，則  $p - q + r = 1 + k$ 。

從平面圖的特性來看，如果有一個區域它不是三角形，則我們可以再加入一些邊，使得新圖仍然是平面圖；因此，最多邊的平面圖應該是每個區域都是三角形。

**定義 5.3.** 一個平面圖  $G$  稱為是極大的平面圖 (Maximal Planar Graph)，如果對於不相鄰的任意兩點  $u$  與  $v$ ， $G + uv$  皆不為平面圖。

由於在極大的平面圖中，每個區域皆為三角形，所以它也被稱為是三角化的平面圖 (Triangulated)。以下的公式是說明這種圖的邊數。

**定理 5.4.** 假如  $G$  是具有  $p \geq 3$  個點， $q$  個邊的極大平面圖， $q = 3p - 6$ 。

**證明.** 由  $3n = 2q$ ，所以  $q = 3p - 6$ 。 ■

因此，一個具有  $p$  點的平面圖最多只會有  $3p - 6$  個邊。



**推論 5.5.** 一個具有  $p(\geq 3)$  點的平面圖最多有  $3p - 6$  個邊。

**推論 5.6.**  $K_5$  不是平面圖。

**推論 5.7.** 在一個平面圖中必定存在有度數小於 6 的點。

**證明.** 若是  $\delta(G) \geq 6$ ，則  $|E(G)| \geq 3q > 3p - 6$ 。 ■

更仔細一點的計算可以推得下列的定理。

**定理 5.8.** 令  $G$  為具有有  $p(\geq 4)$  點的極大平面圖，同時令  $p_i$  代表在  $G$  中度數為  $i$  的點數，則當  $n = \Delta(G)$  時

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = p_7 + 2p_8 + \cdots + (n - 6)p_n + 12 \text{。} \dots\dots\dots (*)$$

**證明.** 因為  $p = \sum_{i=1}^n p_i$ ， $2q = \sum_{i=3}^n ip_i$  以及  $q = 3p - 6$ ，所以  $\sum_{i=3}^n ip_i = 6 \sum_{i=1}^n p_i - 12$ ，這可以推得欲證的式子。 ■

由 (\*) 可以推得  $3p_3 + 2p_4 + p_5 \geq 12$ ，也就是說度數小於 6 的點數至少會有 "4" 個 (?)。利用這樣的結果我們可以證明任一個平面圖都可以畫在平面使得每一邊都是直線段。

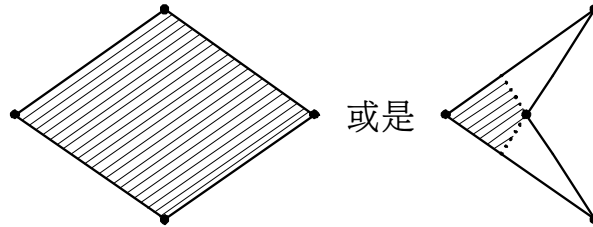
**定理 5.9.** (Fáry v.s. Wagner)

對於任意的平面圖都存在一種嵌入 (畫) 法，使得每個邊都是直線段。

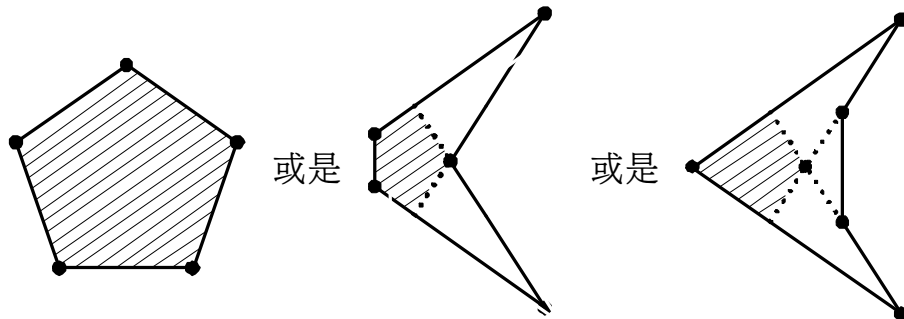
**證明.** 用點歸納。(顯然只要能證明所有的極大平面圖都成立，則一般平面圖自然沒有問題。) 當  $p = 1, 2, 3, 4$ ，命題顯然成立。我們假設當一個極大平面圖具有  $p - 1$  時命題成立，同時令  $G$  為一個具有  $p$  點的極大平面圖。由推論 4.7， $G$  中存在有度數少於 6 的點  $v$ 。現在考慮  $G - v$ 。由歸納假設，有一個直線段的嵌入法。因為是極大的平面圖，所以去掉  $v$  之後，與  $v$  相鄰的點為成一個區域，這個區域分別由三角形，四邊形或五邊形所圍成。

如果是三角形，則將放在三角形中間，再分別與三頂點用直線段連接即可，因此剩下四邊形及五邊形兩種情況。

(i) 四邊形：將點放在下圖的斜線部份內。



(ii) 五邊形：將點放在下面可能情況的斜線部份內。



■

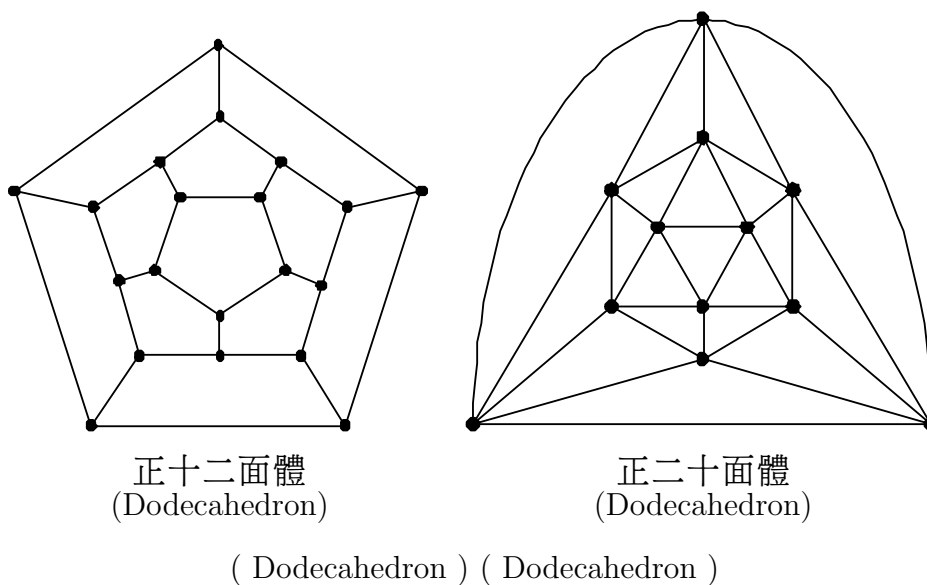
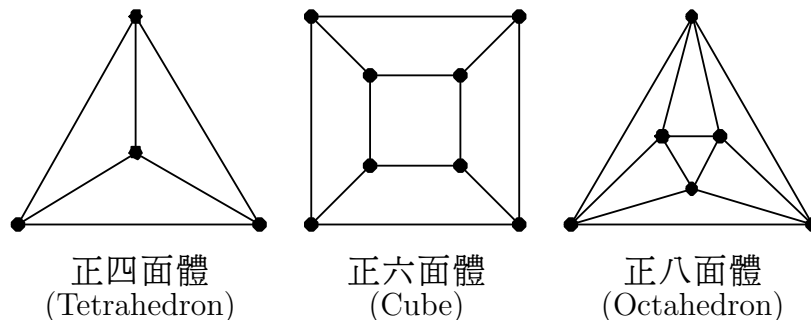
利用尤拉公式也可以很快地求出所有的正多面體。這個道理並不難，因為正多面體所對應的圖是正則平面圖，而度數不可能全部都  $\geq 6$ ，所以只剩下 3-正則，4-正則及 5-正則圖。再加上對偶圖 (Dual) 也是平面圖的概念，它的區域也只可能由三角形，四邊形或五邊形所圍成，這麼一來，要求出所有的正多面體就有希望了。

**定理 5.10.** 正多面體一共下列 5 種，正四面體，正六面體，正八面體，正十二面體及正二十面體。

**證明.** 令  $P$  為正多面體， $G(P)$  為對應的平面圖，頂點數，邊數及區域數分別為  $V, E, F$ ；度數為  $i$  的點數為  $V_i$  以及邊數為  $j$  的區域數為  $F_j$ 。於是總區域數  $F = F_h$  ( $h = 3$  或  $4$  或  $5$ )，而  $V = V_k$  ( $k = 3$  或  $4$  或  $5$ )。由尤拉公式推得  $-8 = 4E - 4V - 4F = (h - 4)F_h + (k - 4)V_k$  (?)。所以可能情況有

- (i)  $h = 3, k = 3$ ，於是  $F_h = V_k = 4$  (正四面體)。
- (ii)  $h = 3, k = 4$ ，於是  $F_3 = 8, V_4 = 6$ ，這是正八面體。

- (iii)  $h = 3, k = 5$ , 這是正二十面體。  
 (iv)  $h = 4, k = 3$ , 這是正六面體, 最後  
 (v)  $h = 5, k = 3$ , 於是  $F_5 = 12, V_3 = 20$ , 它是正十二面體。



**作業 8.** 證明在一個平面圖  $G$  中, 如果最小圈的長度 (Girth) 不小於 4, 則  $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$ 。

**作業 9.** 利用上述結果證明  $K_{3,3}$  不是平面圖。

**作業 10.** 在平面上有一點集合  $S$ ,  $S$  中任意兩點的距離都不小於 1。現在把距離恰為 1 的兩點連接起來。試証當  $|S| = n$  時, 此圖最多有  $3n$  個邊。

## 6. 平面圖的刻劃

爲了有效地描述平面圖或其它類型圖, 首先我們介紹同態的概念。

**定義 6.1.** (細分, Subdivision)

將圖  $G$  中的一個邊  $uv$  移走而用兩個邊  $uw$  及  $wv$  來取代的動作稱爲是  $G$  的一個基本細分 (Elementary Subdivision)。而一個圖的細分是由一連串的基本細分所獲得。

細分的工作基本上是在邊上加入一些度數爲 2 的點, 例如圖 6.1 中的  $G_1$  與  $G_2$  分別可以由  $G_3$  的基本細分而獲得。

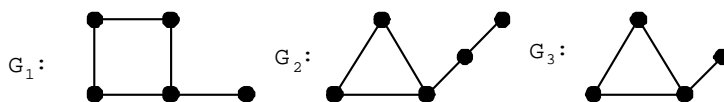


圖 6.1 : 同態圖

**定義 6.2.** (同態, Homeomorphism)

如果  $G_1$  與  $G_2$  分別由某一圖  $G_3$  的細分而獲得, 則  $G_1$  與  $G_2$  同態, 以  $G_1 \sim G_2$  表示 ( $G_1$  is homeomorphic with  $G_2$ )。

顯然, 同態是種等價關係, 而且同態的圖同爲平面圖或同爲非平面圖 (Non-planar), 而且當一個圖  $G$  含有一個與非平面圖同態的子圖時,  $G$  自然不會是平面圖。

**定理 6.3.** 假如  $G$  包含一個子圖  $H$  它與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態, 則  $G$  不是平面圖。

要是  $G$  不包含與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態的子圖, 則是否  $G$  就是平面圖? 這個問題在 1930 被 Kuratowski 所證明, 它也是圖論中偉大的定理之一。在沒有描述如何證明該定理之前, 我們先要知道一個現象, 它與圖的區塊 (Block) 有關。

**定義 6.4.** (Block)

沒有切點的連通圖稱爲區塊。一個圖  $G$  的區塊是指  $G$  的一個極大子圖 (Maximal Subgraph) 它本身是一個區塊。

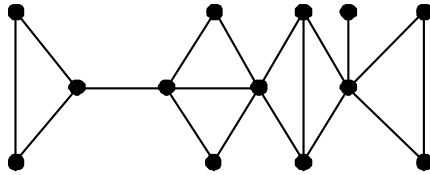


圖 6.2 : 有 6 個區塊的圖

**定理 6.5.** 一個圖為平面圖的充要條件是它的每一個區塊都是平面圖。

**證明.**

由於區塊與區塊之間是以切點相接, 所以定理證明不難。有了定理 6.5 , 刻劃平面圖的工作可以專注該圖區塊的刻劃即可。 ■

**定理 6.6.** (Kuratowski)

一個圖是平面圖的充要條件為該圖不包含與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態的子圖。

**證明.**

( $\Leftarrow$ )

由上節我們已經知道  $K_5$  及  $K_{3,3}$  均不為平面圖, 所以這個方向的證明比較容易。

( $\Rightarrow$ )

(摘要描述) 由定理 6.5 , 我們只要證明不包含子圖與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態的區塊必定是平面圖即可。假設這敘述不對, 則必存在有不是平面圖的區塊它不包含有任何子圖與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態。令  $G$  為邊數最少的一個。則  $\delta(G) \geq 3$  (?), 因此  $G$  不是邊數最少的區塊 (?). 所以令  $e = uv \in E(G)$ , 使得  $H = G - e$  仍然為一個區塊。現在  $H$  更不可能有子圖會與  $K_5$  或  $K_{3,3}$  同態, 所以由假設  $H$  為平面圖, 而且  $H$  中包含一個圈  $C$ , 它通過  $u$  及  $v$  同時滿足在  $C$  內部區域數為最多。接下來探論  $H$  的特性, 例如  $C$  上由  $u$  到  $v$  的任兩點都不會在  $C$  的外圍 (Exterior) 連出一條路徑, 否則  $C$  就要另外再選。但是  $G$  不是平面圖, 圖 6.3 中的  $P$  必存在。於是  $H - (V(C) \setminus \{u, v_i, v_k\})$  有一個部份包含  $P$ , 令這部份為  $H_1$ , 由  $C$  的選擇  $H_1$  不可能重新嵌入在  $C$  的內部, 所以  $H$  的內部有幾種可能發生 (省略)。但是, 它們都與假設矛盾, 因此無反例存在, 定理得證。

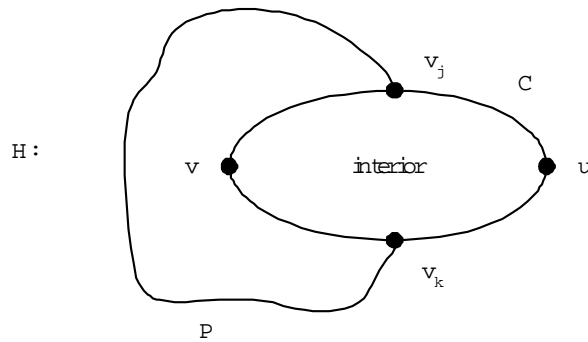


圖 6.3

■

有了定理 6.6，不難發現 Petersen 圖不為平面圖 (作業 11.)。  
相對於把邊細分的概念，以下介紹壓縮 (Contraction) 的概念。

**定義 6.7.** (Contraction) 我們說  $G_2$  是  $G_1$  的壓縮圖如果下面的條件成立： $V(G_1)$  可以分割成  $|V(G_2)|$  個集合  $V_1, V_2, \dots, V_{|V(G_2)|}$  使得  $\langle V_i \rangle_{G_1}$  為一連通圖,  $i = 1, 2, \dots, |V(G_2)|$ 。

在壓縮的過程最基本的作是把原來相連的兩點重合為一點，這樣的過程也稱為是基本壓縮 (Elementary Contraction)；顯然，一般的壓縮是由一連串的基本壓縮而獲得的結果，當然，沒有任何的基本壓縮，即同構 (Isomorphism)，也可以看成是一種壓縮。另外，如果只針對圖中的一個子圖做壓縮，一般稱之為子壓縮 (Subcontraction)。

**定理 6.8.** 假如  $H$  為  $G$  的一個細分圖，則  $G$  是  $H$  的一個壓縮圖。

**證明.**

如果  $G \cong H$ ，則沒有什麼需要證明。現在，如果  $H$  經過  $G$  的細分，則有一連串的基本細分才由  $G$  得到  $H$ ；於是，把次序反過來依次做基本壓縮即可得到  $G$ 。

■

以下的定理與 Kuratowski 的定理相似。

**定理 6.9.**  $G$  為平面圖的充要條件為  $G$  中不含任何子圖它們以被壓縮成  $K_5$  或  $K_{3,3}$ 。

**證明.** : (省略)。

對於平面圖的了解, 除了定理 6.6 與 6.9 的刻劃之外, 也可以利用演算法來判斷一個圖 是否為平面圖。這樣的演算法早在 1964 即已經被 Demoucron, Malgange 及 Pertuiset 所發現; 它的複雜度為  $O(n^2)$ ; 後來 Hopcroft 及 Tarjan (1974) 更提供了線性複雜度的演算法, 在這裡我們省略所有的細節。

**作業 12.** : 一個平面圖如果所有點都會落在一個區域的周界, 則稱它是外平面圖 (Outerplanar)。試證  $G$  為外平面圖的充要條件為  $G$  不含任何與  $K_4$  或  $K_{2,3}$  同態的子圖。

**作業 13.** : 試證 Petersen 圖不為平面圖。

## 7. 非平面圖 (Nonplanar Graphs) 的概念

無法適當地畫在平面 ( 球面 ) 上使得邊與邊皆不互相跨越的圖是本節討論的主角。從上一節的討論中，我們知道一個  $p$  點的平面圖最多只有  $3p - 6$  個邊，當然在該圖的最小圈長 (girth) 受到限制時，邊數也會更少一些，譬如最大的二分平面圖就只有  $2p - 4$  個邊而已，就一般性而言，以下的性質是很容易看出來的現象。

**定理 7.1.** 一個最小圈長為  $g$  的平面圖最多有  $\frac{g}{g-2}(p-2)$  邊。

**證明.** 令圖  $G$  為滿足已知條件而且具有最多邊的圖，同時  $G$  有  $r$  個區域。因為，每個區域最少有  $g$  個邊在它的邊界上，所以  $q = |E(G)| \geq \frac{1}{2}gr$ 。由尤拉公式， $p - q + r = 2$ ， $p - q + \frac{2q}{g} \leq 2$ ， $q\left(1 - \frac{2}{g}\right) \leq p - 2$ ， $q \leq \frac{g(p-2)}{g-2}$ 。 ■

知道了平面圖邊數的上界，第一個可以想像到的研究問題是一個非平面圖究竟離開平面圖有多遠？

**問題 1.** 令  $G$  為一個簡單圖， $S$  為一邊集合， $S \subseteq E(G)$ ，則  $f(G) = \min\{|S| \mid G - S \text{ 為一平面圖}\}$  是多少呢？

顯然， $|S| \geq |E(G)| - (3p - 6)$ ，可是並非具有比  $3p - 6$  個邊少的圖必定是平面圖，所以要求出  $f(G)$  決非易事。這裡對於平面圖  $G$ ， $f(G) = 0$ 。

**作業 14.** 令  $G$  為一個簡單圖，同時令  $W \subseteq V(G)$ ，它滿足將  $W$  縮成一點所得的圖為一平面圖，則  $f(G)$  與  $f(\langle W \rangle_G)$  的關係如何？

在研究一個非平面圖  $G$  的特性時，一定會注意到  $G$  的分割問題。

**定義 7.2.** ( 厚度, Thickness)

$$\theta_1(G) = \min\{n \mid G \text{ 可以分割成 } n \text{ 個平面圖}\}。$$

也就是說，對於一個非平面圖，究竟它可以寫成多少個平面子圖的聯集？

**引理 7.3.** 令  $G$  為一個  $(p, q)$ -圖，即具有  $p$  個點個  $q$  邊的圖，則  $\theta_1(G) \geq \frac{q}{3p-6}$ 。



**證明.** 因為一個  $p$  點的平面圖最多只有  $3p - 6$  個邊。於是，對於完全圖，我們就可以利用上述的不等式，求出  $\theta_1(K_p) \geq \frac{p(p-1)}{6(p-2)}$ 。然而，真正的答案則有賴更多人的努力。 ■

**定理 7.4.** (Beineke 等人)

$$\theta_1(K_n) = \begin{cases} \lceil \frac{p+7}{6} \rceil & , \text{ 當 } p \neq 9, 10 \text{ 時,} \\ 3 & , p = 9, 10. \end{cases}$$

其它的結果，例如  $\theta_1(Q_n) = \lceil \frac{n+1}{4} \rceil$ ，其它的圖所知就不多了。

**作業 15. :** 試求  $\theta_1(K_{m,n})$ 。

另一個和厚度有極大相關的量是用點集合來看，一般也以點厚度 (Vertex-thickness) 稱之。

**定義 7.5.** (點厚度)

$\theta(G) = \min\{n \mid G_1, G_2, \dots, G_n \text{ 爲 } G \text{ 的導出子圖同時滿足每一個都平面圖而且 } E(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^n E(G_i)\}$ 。

這個量的了解就更少了，例如  $\theta(K_p) \geq \frac{p(p-1)}{12}$  (?)。

**作業 16. :** 試求  $\theta(K_p)$ 。

**作業 17. :** 試求  $\theta(K_{m,n})$ 。

討論完厚度之後，再來看一個非平面圖所不可避免的現象 - 邊的跨越 (Crossing)。如果把一個非平面圖畫在平面上或球面上，則一定會有跨越的情況發生，究竟發生的次數如何呢？

**定義 7.6.** (跨越數)

$v(G)$  爲將  $G$  畫在平面上的所有不同畫法中跨越最少的次數。

**例如.**  $v(K_4) = 0$ ,  $v(K_5) = 1$  (參考圖 7.1)。

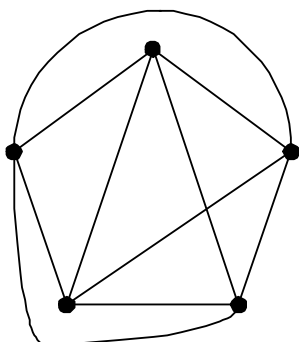


圖 7.1 :  $v(K_5) = 1$

和前面兩個問題一樣，跨越數也是非常不容易決定的量，不同的是，它吸引過非常多的圖論學者參與這方面的研究。

**定理 7.7.**  $v(K_p) \leq \frac{1}{4} \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{p-3}{2} \rfloor$ ，同時在  $1 \leq p \leq 10$  時，不等式為等式。

這個定理前面不等式的部分是由 Blažek, Koman 及 Guy 所提供，而後面等式的部分則主要是 Guy 的貢獻。以下就針對  $p \leq 6$  時加以說明。顯然，當  $p \leq 4$  時， $v(K_p) = 0$  ( $\lfloor \frac{p-3}{2} \rfloor = 0$ )，而  $p = 5$ ， $v(K_p) = 1$ ，這由圖 11 可以得知，最後剩下  $v(K_6) = 3$  需要證明。

假設  $v(K_6) = c$ ，則在  $c$  個跨越的地方加入  $c$  個點，於是新圖  $\widetilde{K}_6$  具有  $6 + c$  個點，同時具有  $15 + 2c$  個邊。現在，由平面圖的性質知道具有  $6 + c$  個點的圖，最多有  $3(6 + c) - 6$  個邊，即  $3c + 12 \geq 15 + 2c$ ，所以  $c \geq 3$ 。再由圖 7.2 可得知  $c \leq 3$ ，因此  $v(K_6) = 3$ 。

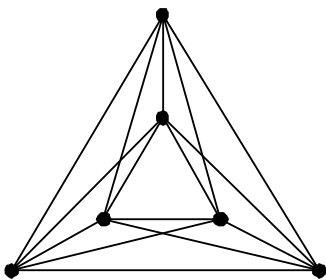


圖 7.2 :  $v(K_6) \leq 3$

作業 18. : 試求  $v(K_7)$ 。

在跨越數的研究中，以  $v(K_{m,n})$  的研究最富歷史性，而且也有它的研究起源。Paul Turán 他提到，當時他在布達佩斯附近的一個磚窯工作，燒好的磚要利用單鐵軌（手推車）運送到存放的地方，由於窯有很多個（ $m$ ），存放的地方也有不少個（ $n$ ），於是這些單鐵軌就會跨越（相交）的地方；但是交會的地方容易造成跳動以及磚塊掉落而浪費時間，於是，為了節省時間以及避免可能翻車的意外，減少交會點（跨越數）是非常重要的課題，於是他問 Zarankiewicz 這個問題，不久查兄提供了以下的答案，

$$v(K_{m,n}) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lceil \frac{m-1}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n-1}{2} \rceil \dots \dots (1)$$

不過，他只是證明了 (1) 的右式為上界，即  $v(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lceil \frac{m-1}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ ，而究竟 (1) 的上界是否也是下界，沒想到一直到今天仍是未知，所以 (1) 也就成了聞名”磚窯猜測”。

其實，(1) 式上界的獲得並不困難，它主要是來自一種比較有效的畫法，例如： $v(K_{4,5}) \leq 8$ ，它將  $m$  點與  $n$  點分別平均分配在垂直與水平的線上，再連接即可。

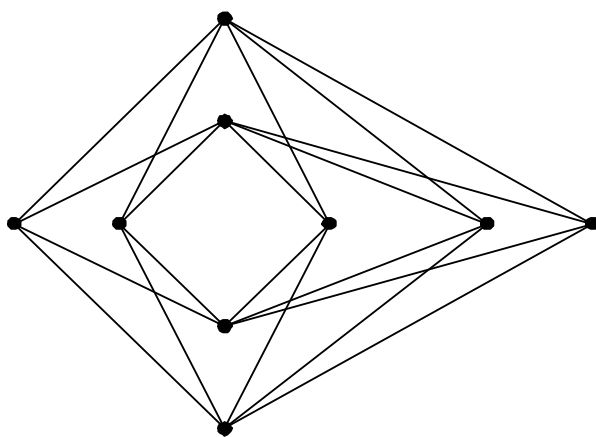


圖 7.3 :  $v(K_{4,5}) \leq 8$

由於圖 7.3 的啓示，我們可以進一步猜測由直線畫法所造成的跨越數  $\bar{v}(G)$ ，在  $G \cong K_{m,n}$  時， $v(G) = \bar{v}(G)$ ；當然，就一般而言  $v(G) \leq \bar{v}(G)$ 。

在磚窯猜測的研究方面，目前最好的結果來自 Kleitman。

**定理 7.8.** 對於  $1 \leq \min \{m, n\} \leq 6$ ， $v(K_{m,n}) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \lceil \frac{m-1}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ 。

作業 19. :  $\nu(K_{7,7}) = ?$  (77, 79 或 81)

如果把磚窯問題作一擴展, 則可以討論完全  $t$  分圖  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  的跨越數; 截至目前為止, 連可能的上界都不知去向哩!

作業 20. : 求  $\nu(K_{3,3,3})$ 。

在跨越數的研究中, 最熱門的圖, 除了上述提及的完全圖, 完全多分圖外, 就非  $G \times H$  形式的圖莫屬。由於所解決的問題都是特殊圖。以下僅列出結果參考:

定理 7.9.  $\nu(Q_4) = 8$ 。 ( $\nu(Q_n)$ ,  $n \geq 5$ , 答案未知。)

定理 7.10.  $\nu(C_3 \times C_n) = n$ 。 (Beinekc 及 Ringelsen)

定理 7.11.  $\nu(C_4 \times C_n) = 2n$ 。 (BR)

定理 7.12.  $\nu(C_5 \times C_n) = 3n$ 。 (BR)

猜測:  $\nu(C_m \times C_n) = (m - 2)n$ , 其中  $m \leq n$ 。

作業 21. : 求  $\nu(C_5 \times C_{10})$ 。

## 8. 圖的虧格 ( The Genus of a Graph )

首先, 我們知道曲面可以分成可定向及不可定向兩種, 因此, 圖的虧格也分成兩種。

**定義 8.1.** 圖  $G$  的可定向虧格 (Orientable Genus) 簡稱虧格,  $\gamma(G)$ , 是指  $G$  可以嵌入所有可定向曲面中, 虧格最小的曲面之虧格 (把手數)。而不可定向虧格 (Non-orientable Genus),  $\bar{\gamma}(G)$ , 則可以嵌入的所有不可定向曲面中, 跨越蓋數最少的曲面所用的跨越蓋數。

例:  $\gamma(K_5) = \gamma(K_6) = \gamma(K_7) = 1$ 。(參考下圖)

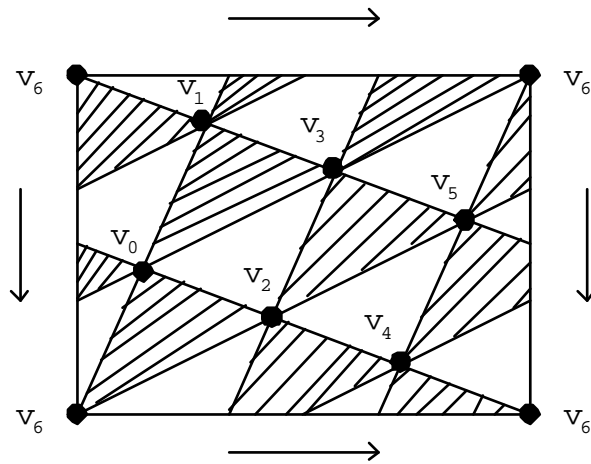


圖 8.1:  $K_7$  嵌入於輪胎面上

以下討論圖嵌入的性質, 在圖中重邊及弧圈都是容許的, 也就是說圖可以是擬圖 (Pseudograph)。

**定理 8.2.** 令  $G$  為一  $(p, q)$ -圖, 同時它被圓盤嵌入在一個虧格為  $r$  的曲面上, 則  $p - q + r = 2 - 2n$ , 其中  $r$  為區域數。

**證明.**

(對  $n$  歸納) 首先, 當  $n = 0$  而且  $G$  中沒有任何重邊或弧圈, 由尤拉公式知道  $p - q + r = 2$ , 所以成立。現在, 假設  $G$  中的重邊與弧圈數共有  $k$  個。令  $G_1$  為從  $G$  中去掉這些重邊與弧圈的圖, 而且  $G_1$  為具有  $r_1$  個區域的  $(p_1, q_1)$ -圖。顯然,  $p_1 = p$ ,  $q_1 = q - k$  以及  $r_1 = r - k$ 。所以  $p_1 - q_1 + r_1 = 2$ , 亦即  $p_1 - (q_1 + k) + (r_1 + k) = 2$ , 於是  $p - q + r = 2$ ,  $n = 0$  時成立。

現在, 令定理在  $n-1$  時成立,  $n \geq 1$ , 並且令  $G$  為一個  $(p, q)$ -擬圖被圓盤嵌入於虧格為  $n$  同時有  $r$  個區域的曲面上。

首先, 沿著曲面上的一個把手畫一個圈  $C$  使得這個圈不含  $G$  中的任何點 (如圖 8.2)。此時  $C$  必然會與  $G$  中的邊產生跨越點, 否則嵌入的方式就不會是圓盤嵌入 (2-cell embedding)。不失一般性, 我們可以假設  $C$  與  $G$  的邊交會於有限多點 ( $k$  點) (?), 並且假設與  $C$  有交會到的邊為  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , 於是  $1 \leq m \leq k$ , 而且如果  $e_i$  交  $C$  於  $l_i$  個點, 則  $\sum_{i=1}^m l_i = k$ 。

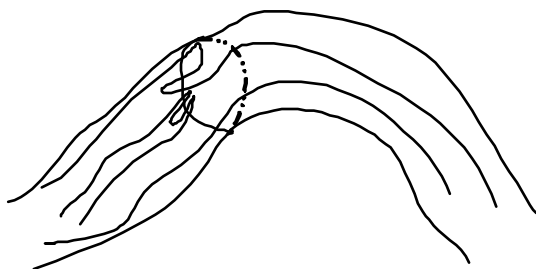


圖 8.2 : 切割處

現在, 在交會處加上新點, 同時對於  $C$  中連續的兩點加入一新邊, 所以和  $C$  碰到  $l$  次的邊就被分成  $l+1$  新邊。(圖 8.3)

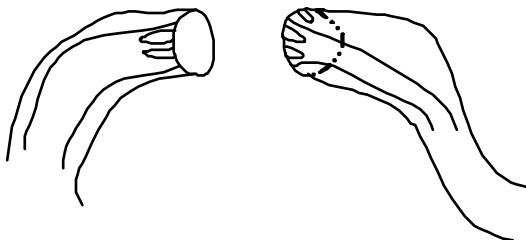


圖 8.3 : 切開之後

令新得到的圖為  $G'$ , 同時  $G'$  為具有  $r'$  個區域的  $(p', q')$  一圖。於是  $p' = p + k$ ,  $q' = q + 2k$  (?), 以及  $r' = r + k$  (?); 更重要的是在  $G'$  中, 每個區域都和開圓盤拓撲等價, 也就是說  $G'$  也是一個圓盤嵌入。

現在, 順著  $C$  將把手切斷, 同時在開口處蓋上兩個圓盤使得新的曲面只剩  $n-1$  個把手 (如圖 8.4)。

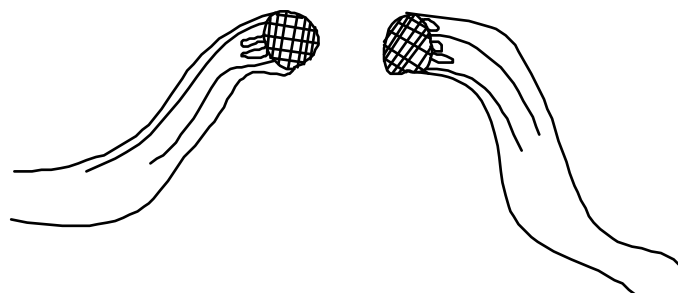


圖 8.4：切開 (填平缺口)

經過切開  $C$  再加蓋的曲面顯然又與原來的嵌入形式有些不同。令這個曲面為  $S''$ ，此時的新圖為  $G''$ 。於是，對應的量  $p'' = p' + k = p + 2k$ ， $q'' = q' + k = q + 3k$ ，同時  $r'' = r' + 2 = r + k + 2$ 。

由歸納假設，因  $S''$  為虧格  $n - 1$  的曲面，而  $G''$  圓盤嵌入在上面，所以  $p'' - q'' + r'' = 2 - 2(n - 1)$ ，因此  $(p + 2k) - (q + 3k) + (r + k + 2) = 2 - 2(n - 1)$ ，亦即  $p - q + r = 2 - 2n$ ，定理得證。 ■

上述定理說明了圓盤嵌入的特性，當然對於沒有重邊或弧圈的圖，上述的等式也自然成立。現在，再利用 Youngs 所提供的拓樸證明，圖的虧格就可以利用  $p, q, r$  表示出來。

**定理 8.3.** (Euler-Poincare)

設  $G$  為嵌入於虧格  $\gamma(G)$  而且有  $r$  個區域的曲面上之  $(p, q)$ -連通圖，則  $p - q + r = 2 - 2\gamma(G)$ 。

為了方便起見，圖  $G$  如果是嵌入在虧格為  $\gamma(G)$  的曲面上，則稱此嵌入為最小嵌入，顯然，最小嵌入必定是圓盤嵌入。

利用定理 8.4，我們不難求出  $\gamma(G)$  的下界。

**作業 22.**：令  $G$  為連通圖的  $(p, q)$ -圖 ( $p \geq 3$ )。試證  $\gamma(G) \geq \frac{q}{6} - \frac{p}{2} + 1$ 。

**作業 23.**：令  $G$  為連通圖的  $(p, q)$ -圖 ( $p \geq 3$ )，且而  $G$  中沒有三角形。試證  $\gamma(G) \geq \frac{q}{4} - \frac{p}{2} + 1$ 。

研究圖的虧格最著名的莫過於完全圖與完全二分圖的虧格，由於要明這兩個結果需要另外的工具，在此省略，僅列出它們的結果。

**定理 8.4.** (Ringel 及 Youngs)

$$\gamma(K_p) = \left\lfloor \frac{(p-3)(p-4)}{12} \right\rfloor, \quad (p \geq 3)。$$

**定理 8.5.** (Ringel)

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{(m-3)(n-4)}{4} \right\rfloor, \quad (m, n \geq 2)。$$

值得一提的是：要得到最小的嵌入，必需使得嵌入後區域數為最多，這可以由 Euler-Poincare 定理看出來 所以求最小虧格對應於將圖分割成有向圖使得這分割滿足額外的條件，即一個邊恰好有兩個方向。例如，當  $p \equiv 0$  或  $1 \pmod{3}$  時， $K_p$  的最小嵌入將會導出有向的三元系。(?)

**作業 24.**：求  $\gamma(Q_n)$ 。



## 9. 旋轉嵌入模式 (Rotational Embedding Scheme)

截至目前為止, 旋轉嵌入模式仍然是最有效的圓盤嵌入方式。首先, 我們先觀察一個圓盤嵌入與旋轉有何種關係。如圖 9.1 所示, 假設圖中表示一個  $K_5$  嵌入於輪胎面的圓盤嵌入, 而這固嵌入中顯然具有 5 個區域。

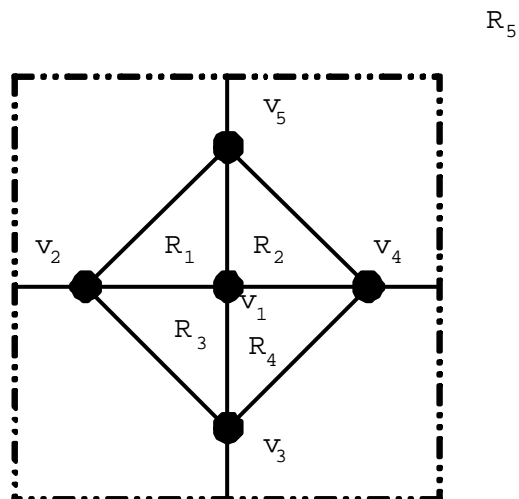


圖 9.1 :  $K_5$  的一個圓盤嵌入

現在, 對於每一個點都對應一個表列 (逆時針方向旋轉), 例如

$$v_1 \leftrightarrow (2, 3, 4, 5) \text{ 即 } v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_2,$$

$$v_2 \leftrightarrow (1, 5, 4, 3) \text{ 即 } v_1 - v_5 - v_4 - v_3 - v_1,$$

$$v_3 \leftrightarrow (1, 2, 5, 4) \text{ 即 } v_1 - v_2 - v_5 - v_4 - v_1,$$

$$v_4 \leftrightarrow (1, 3, 5, 2) \text{ 即 } v_1 - v_3 - v_5 - v_2 - v_1,$$

$$v_5 \leftrightarrow (1, 4, 3, 2) \text{ 即 } v_1 - v_4 - v_3 - v_2 - v_1.$$

爲了方便表示, 令  $\pi_i$  代表  $v_i$  所對應的排列。有了排列, 我們也很快地可以把區域所圍繞的弧依次表示出來, 例如, 圖 9.1 中的  $R_2$  所圍繞的弧分別爲  $(v_2, v_1)$ ,  $(v_1, v_{\pi_1(2)})$ ,  $(v_{\pi_1(2)}, v_{\pi_{\pi_1(2)}(1)})$  也就是  $(v_2, v_1)$ ,  $(v_1, v_3)$ ,  $(v_3, v_2)$ 。

而  $R_5$  所繞的弧爲  $(v_2, v_3)$ ,  $(v_3, v_5)$ ,  $(v_5, v_2)$ ,  $(v_2, v_4)$ ,  $(v_4, v_5)$ ,  $(v_5, v_3)$ ,  $(v_3, v_4)$ ,  $(v_4, v_2)$ 。 (?)

這種排列 (旋轉) 與區域的對應的確提供了一個研究嵌入的好工具, 這工具早在 1980 年左右先後由 Dyck 及 Heffter 所提出, 後來在 1960 年左右 Edmonds 及 Youngs 則分別更進一步地討論它的應用, 以下的定理充分說明這定理的成就。

### 定理 9.1. (旋轉嵌入模式)

令  $G$  爲一連通圖, 同時  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ 。對於  $G$  的任意圓盤嵌入, 都在一個唯一的  $p$ -維序對  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ , 它滿足對於每一個  $1 \leq i \leq p$ ,  $\pi_i$  是由  $v_i$  點所相連點按逆時針方向轉所得到的排列 (下標)。反過來, 對於任意的  $p$ -維序對  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ , 只要滿足  $\pi_i : V_i \xrightarrow{1-1} V_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $V_i = \{j | v_j \in N(v_i)\}$ , 就必定存在一個  $G$  的圓盤嵌入, 同時它滿足  $v_i$  的鄰點恰好按  $\pi_i$  逆時針排列。

### 證明.

(摘要) 第一部佷顯然成立。現在假設我們有一個  $p$ -維序對  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$  滿足已之條件。現在, 令  $D$  爲由  $G$  所獲得的有向圖 (在  $G$  中的每一邊用兩個相反方向的弧取代)。定義  $\pi : E(D) \rightarrow E(D)$ ,  $\pi((v_i, v_j)) = \pi(v_i, v_j) = (v_j, v_{\pi_j(i)})$ 。

因爲  $\pi$  是 1-1, 所以  $\pi$  是  $E(D)$  的一個排列; 於是  $\pi$  可以寫成互斥圈的合成 (disjoint cycles)。現在利用這些圈即可求出所有的區域。 (?) 接下來再將  $(v_i, v_j)$  與  $(v_j, v_i)$  重合起來。於是曲面的虧格  $n$  就可以利用  $p - q + r = 2 - 2n$  來決定。 ■

有了定理 9.1, 要得到一個虧格較小的嵌入, 就決定於  $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ , 以下的例子說明如何將  $K_{2m, 2n}$  嵌入在虧格爲  $(m-1)(n-1)$  的最小嵌入。首先,  $K_{2m, 2n} = (A, B)$ ,  $A = \{v_1, v_3, \dots, v_{4m-1}\}$ ,  $B = \{v_2, v_4, \dots, v_{4n}\}$  及  $m \leq n$ 。

現在只要找到適當的  $\pi_1$  即可。

令  $\pi_1 = \pi_5 = \dots = \pi_{4m-3} = (2, 4, 6, \dots, 4n)$ ,

$$\pi_3 = \pi_7 = \dots = \pi_{4m-1} = (4n, \dots, 6, 4, 2),$$

$$\pi_2 = \pi_6 = \dots = \pi_{4n-2} = (1, 3, 5, \dots, 4m-1),$$

$$\pi_4 = \pi_8 = \dots = \pi_{4n} = (4m-1, \dots, 5, 3, 1),$$

於是剩下要證明的是利用定理 9.1, 求得  $\pi$  可以寫成有向 4-圈的合成 (作業 25.), 這表示一共有  $2mn$  個區域; 由  $p - q + r = 2 - 2\gamma(K_{2m,2n})$ ,  $\gamma(K_{2m,2n}) = \frac{1}{2}(2 - 2m - 2n + 4mn - 2mn) = (m-1)(n-1)$ 。

**作業 26.** : 試求  $\gamma(K_{2m,2n+1})$ 。

在嵌入的研究中, 以下的定理扮演一個非常重要的角色, 雖然, 是只有加入一個邊, 卻有相當特別的變化。

**定理 9.2.** (加邊引理, Ringeisen-White Edge-Adding Lemma)

令  $G$  為一連通圖, 其中  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  而且  $v_i$  不與  $v_j$  相鄰。如果  $G$  有一個圓盤嵌入到曲面  $S_h$  上, 同時滿足這個嵌入有  $r$  個區域, 而且  $v_i$  與  $v_j$  分別為區域  $R_i$  與  $R_j$  邊界上的點; 則在  $H = G + v_i v_j$  這個圖有以下兩個情況, 分別成立:

(a) 假如  $R_i \neq R_j$ , 則  $H$  可以圓盤嵌入在曲面  $S_{h+1}$  上, 同時這個嵌入具有  $r-1$  個區域而且  $v_i$  與  $v_j$  會落在同一區域的邊界上。

(b) 假如  $R_i = R_j$ , 則  $H$  可以圓盤嵌入在曲面  $S_h$  上, 同時這個嵌入具有  $r+1$  個區域而且  $v_i$  與  $v_j$  會分別落在兩個不同區域的邊界上。

**證明.**

利用旋轉嵌入模式, 詳細證明在此省略。 ■

有了上面的引理, 我們可以證明在拓樸圖論中非常有用的性質:

**推論 9.3.** (鄰邊引理, Adjacent Edges Lemma)

令  $e$  及  $f$  為連通圖  $G$  中相鄰的兩邊。如果  $G - e - f$  可以圓盤嵌入使得區域只有一個; 則  $G$  也可以辦到。

**證明.**

令  $G' = G - e - f$ ,  $e = uv$ ,  $f = vw$  以及  $v \neq w$ 。現在考慮  $G' + e$ 。因為  $G'$  可以圓盤嵌入在曲面上使得區域只有一個, 是  $u, v$  在同一區域的邊界; 由定理 9.2(a),  $G' + e$  可以圓盤嵌入在曲面上使得區域恰有兩個, 而且  $u$  與  $v$  落在不同的區域中; 現在考慮  $G' + e + vw$ 。因為  $u, v$  在不同的區域邊界, 而且  $vw \notin G' + e$ , 所以  $v$  與  $w$  必在不同區域邊界上; 於是由定理 9.2(b),  $G' + e + f = G$  可以圓盤嵌入於曲面上使得區域是唯一的。■

由定理 8.2, 我們知道圖的可定向圓盤嵌入會滿足  $p - q + r = 2 - 2n$ 。

所以, 當區域數越小, 則所要嵌入的曲面之虧格也愈大; 針對  $p - q + r$  必為偶數的現象, 不難看出當  $p$  與  $q$  同奇同時,  $r$  最小的可能是 2, 而  $p$  與  $q$  的差為奇數時,  $r$  的最小可能為 1; 這也告訴我們用最多把手的圓盤嵌入, 把手數是有上界的。

**定理 9.4.** (貝蒂數, Betti Number 或 Cycle Rank)

一個圖  $G$  的貝蒂數  $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + k$ ,  $k$  為圖  $G$  的部份數 (Components)。所以連通圖的貝蒂數為  $q - p + 1$ 。

**定義 9.5.** (最大虧格, Maximum Genus) 一個圖  $G$  的最大虧格  $\gamma_M(G)$  是它可以圓盤嵌入所需要的最多把手數。

**定理 9.6.** 令  $G$  為一連通圖, 則  $\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ 。同時, 等式成立的充要條件為  $G$  可以找到一個圓盤嵌入使得在這個嵌入中恰好具有一個或兩個區域, 1 或 2 決定於  $\beta(G)$  是偶數或奇數。

**證明.**

由  $p - q + r = 2 - 2\gamma_M(G)$ , (定理 8.2) 所以  $\beta(G) = q - p + 1 = 2\gamma_M(G) + n - 1$ ,  $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) + 1 - r}{2} \leq \frac{\beta(G)}{2}$ 。因為  $\gamma_M(G)$  為整數, 所以  $\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ 。至於等式可以直接核對。■

**問題 2.:** 是否每一個圖  $G$  都可以圓盤那入於具有  $\lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  個把手的曲面呢? (答案是否定的, 詳細說明在下一節。)

圓盤嵌入的研究在引進最大虧格的角色之後有了更大的突破。利用定理 9.2 及旋轉嵌入模式, Duke 證明了以下所謂插值定理 (Interpolation Theorem)。

**定理 9.7.** (Duke)

假如一個連通圖  $G$  可以分別圓盤嵌入於  $S_m$  與  $S_n$  中,  $m < n$ 。則對於所有的正整數  $k$ ,  $m \leq k \leq n$ , 皆存在一個圓盤嵌入將  $G$  圓盤嵌入在  $S_k$  上。

**證明.** : (省略)。

**推論 9.8.** 一個連通圖  $G$  具有一個在  $S_k$  上的圓盤嵌入之充要條件為  $\gamma(g) \leq k \leq \gamma_M(G)$ 。

**作業 27.** : 試求  $K_6$  所有可能之圓盤嵌入,  $(S_1, S_2, \dots, S_5)$ 。

## 10. 圖的最大虧格

由於旋轉嵌入模式說明了一個圖能被圓盤嵌入的充要條件, 所以一個圖它的圓盤嵌入方式最多有  $\prod_{i=1}^p (deg(v_i) - 1)!$ , 於是, 最小虧格 (Genus) 與最大虧格 (Maximum) 都可望求出來; 然而, 它們兩者的命運截然不同, 前者的判斷相當困難, 就演算法的概念而言, 求出虧格已經被證明是 NP-complete 的問題; 然而, 後者卻存在有一個 Polynomial-time 的演算法可以求出來, 也因此, 刻劃這個量是非常有希望, 事實證明有個幾個好的方法可以求出最大虧格。不但如此, 求最大虧格經過 Jungerman, Xuong, Nebeský 等人的努力, 已經成爲是一個組合的問題, 看不出有圖嵌入的形式。

首先, 再回憶一個重要定義。

**定義 10.1.** (Cycle Rank, Betti Number)

具有  $k$  個部份的  $(p, q)$  一圖  $G$ , 它的貝蒂數 (Betti Number)  $\beta(G) = q - p + k$ 。

由於我們研究的嵌入都是圓盤嵌入, 因此被嵌入的圖自己被要求是連通圖。(因爲不連通的圖無法找到圓盤嵌入。(??)) 所以, 這一節中  $\beta(G) = q - p + 1$ 。

**定理 10.2.** (定理 9.6)

令  $G$  爲一連通圖, 則  $\gamma_m(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ 。

**定義 10.3.** (最大可嵌入圖, Upper Embeddable Graph)

滿足  $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$  的圖  $G$  稱爲是最大可嵌入圖。

以下是刻劃最大可嵌入圖的一種方法。

**定義 10.4.** 令  $T$  爲  $G$  的一個懸掛樹。如果  $G - E(T)$  最多只包含一個奇數邊的部份, 則  $T$  稱爲是  $G$  的分裂樹 (Splitting Tree)。

**引理 10.5.** 令  $T$  爲一個  $(p, q)$ -圖  $G$  的分裂樹, 則  $G - E(T)$  中每個部份都具有偶數個邊的充要條件爲  $q - p$  是奇數或者是  $\beta(G)$  爲偶數。

**證明.** : (作業 28.)。

**定理 10.6.** (Jungerman 及 Xuong)

一個圖  $G$  是最大可嵌入圖的充要條件爲  $G$  中含有一個裂樹。

**證明.** : (重複利用引理 9.3 , 細節省略)。

如果  $G$  中包含兩個邊互斥的懸掛樹, 則  $G$  一定是最大可嵌入圖 (?), 所以利用以下的理定可以發現有非常多的圖都是最大可嵌入圖。

**定理 10.7.** 任意一個 4-邊連通圖都包含至少兩個互斥的懸掛樹。

接下來, 我們探討哪些圖不是最大可嵌入圖 ;  
例如,

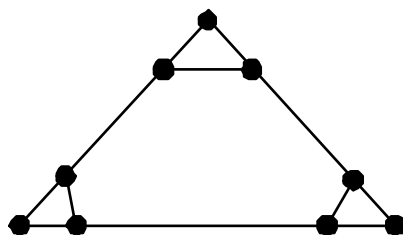


圖 10.1 : 不是最大可嵌入圖

**定義 10.8.** (貝蒂差值 , Betti Deficiency)

令  $\xi(G) = \min \xi_0(G - E(T))$ , 其中  $T$  為  $G$  的懸掛樹。

因此, 只要試過所有的懸掛樹, 即可求出  $\xi(G)$ , 而這個量基本上提供了求最大虧格的公式。

**定理 10.9.** (Xuong)

$G$  的最大虧格  $\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G))$ 。

**證明.** : (省略)。

這個式子也說明了當  $\xi(G) = 0$  或  $1$  時,  $G$  是最大可嵌入圖。同時,  $\xi(G)$  與  $\gamma_M(G)$  成爲等價的值, 而  $\xi(G)$  顯然是一個組合的量。在 Xuong 之後 Nebeský 利用另一種方法來研究  $\xi(G)$ 。

**定理 10.10.** (Nebeský)

令  $c(H)$  代表  $H$  中的部份數,  $b(H)$  代表  $H$  中貝蒂數爲奇數的部份數, 則  $\xi(G) = \max\{v(G, A) = c(G - A) + b(G - A) - |A| - 1 : A \subseteq E(G)\}$ 。

**證明.** : (省略)。

這個結果和 Xuong 所提供的公式恰好形成一個 min-max 配對, 一個求最小值, 另一個則是求最大值 ; 但是, 因爲一個用懸掛樹, 另一個則選用邊

集合, 所以說明較不容易; 不過, 形式差不多, 也就是說, 如果存在一個懸掛樹  $T_0$  及一個邊集合  $A_0$  使得  $\xi_0(G - E(T_0)) = v(G, A_0)$ , 則兩者都等於  $\xi(G)$ 。

值得一提的是, 除了上述兩種方式之外, Fu, Tsai 及 Skoviera 更用了 Cycle Space 的基底來協助求出  $\xi(G)$ , 是目前在這方面唯一能結合上述兩種方法的新結果。詳細說明請參考 "the maximum genus, matchings and the cycle space of a graph" (Czechoslovak Mathematical Journal, 48 (123) (1998))。

**作業 29.** : 求  $\gamma_M(K_n)$ 。

**作業 30.** : 求  $\gamma_M(K_{m,n})$ 。

**作業 31.** : 令  $G$  為直徑為 2 的連通圖, 試證  $\xi(G) \leq 4$ 。 (\*)



## 11. 拓樸圖論的重要問題

### 1. 平面圖 4-色定理的理論證明。

說明：經過多年的努力，仰賴電腦的協助也日益減少，所以人仍然期待，有一天能夠把全部的證明寫出來而且不需要電腦的協助。

### 2. $n$ -cube, $Q_n$ , 的邊著色問題。

說明：我們已經知道  $Q_n$  可以用  $n$  個顏色來塗邊，而且任兩個顏色所生成出來的 2-因子 (2-factor) 是  $C_4$  的聯集。

猜測：我們可以找到一種用  $n$  個顏色的著色法使得其中一個顏色 (固定) 與其它任一種顏色所形成的 2-因子 都是哈密爾頓圈。

### 3. 完全圖 $K_{2n}$ 的邊著色問題。

說明： $K_{2n}$  可以用  $2n - 1$  個顏色來塗邊是已知的事；每一顏色所導出的邊集合顯然是  $K_{2n}$  的一個 1-因子， $2n - 1$  個 1-因子 合起來稱為是  $K_{2n}$  的 1-分解 (1-factorization)。1-分解 的概念也適用第一類的正則圖。

問題：是否在  $K_{2n}$  中存在一種 1-分解 它的任兩個 1-因子 合起來會令形成一個哈密爾頓圈？(這樣的 1-分解 又稱為完美的 1-分解)。

猜測： $Q_n$  具有完美的一分解。

(註) 證明這猜測比問題 2 的猜測更困難。

### 4. Earth-Moon 著色問題

說明：假設每一個國家的領土在地球及月亮上都分別有一塊完整區域 (Region)；為了分辨 國家之間的領土範圍，只要是相鄰的兩個區域就塗上不同顏色，不論是在地球上或月亮都如此。例如 A 國塗上顏色 1，則地球上與月亮上的區域分別是 1，於是與 A 國相鄰的區域都不要再塗上 1 (地球

上及月亮上)。

**問題 1.** Earth-Moon 著色需要多少個顏色? 令  $X_{em}(M)$  代表一個分佈圖  $M$  所需要的最少顏色, 證明  $8 \leq X_{em}(M) \leq 16$ 。

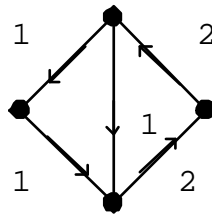
**問題 2.** 證明  $X_{em}(M) \geq 9$ 。

**猜測 :**  $X_{em}(M) = 9$ 。

### 5. Tutte 的非零流量猜測 (Tutte's nowhere-zero 4- and 5-flow Conjecture)

**說明 :** 所謂圖上的  $k$ -flow ( $k$ -流量) 是在圖上的邊指定方向而且給定 0 到  $k-1$  的流量使得圖中的每一個點流出的總量等於流入的總量; 如果不使用 0, 則為非零的  $k$ -流量。

**例.**  $k = 3$



### Tutte's 5-flow Conjecture

每個無橋圖都具有非零的 5-流量。

**問題 1.** 證明無橋的平面圖具有非零的 4-流量。

**提示 :** 首先, 對於此平面圖給與一個定向 (Orientable), 然後在兩個面的共用邊上指定兩個面著色的差。(平面圖的面可以用 1, 2, 3, 4 來著色。)

**問題 2.** Petersen 圖所具有的非零  $k$ -流量,  $K \geq 5$ 。

提示：證明  $k = 4$  辦不到。

### Tutte's 4-flow Conjecture

每個無橋圖而且不含把 Petersen 圖邊上加點的子圖，則此圖具有非零的 4-流量。

參考資料. D. H. Younger, Integer Flows, J. Graph Th. 7(1983), 349-357.

### 6. Tait 著色的推廣。

一個所謂 Tait Coloring 是一個 3-正則圖 (Cubic graph) 的 3-邊著色 (3-edge-coloring)。顯然，不是所有的 3-正則圖都有 Tait Coloring，例如 Petersen 圖就不存有 Tait Coloring。以下介紹幾種不一樣的著色方式來給 3-正則圖著色。

以下的敘述， $G$  為 3-正則圖， $P$  為 Petersen 圖， $(S, t)$  為一 Steiner triple system of order  $v$ ， $H$  為至少有 5 個元素的群。

**問題 1.** 任一個無橋 3-正則圖都可以用  $P$  的邊當顏色來塗在  $G$  的邊上，使得任一點的三個相鄰邊所有的顏色在  $P$  中恰好都彼此相鄰。

例.  $P$  圖本身就是一個例子。

**問題 2.** 任一個無橋 3-正則圖都可以用  $S$  中的元素來著色  $G$  的邊，使得任一點的三個相鄰邊它的三個顏色，恰好形成該  $STS(v)$  的一個三元集。

例. 任何第一類的正則圖一定可以辦到。

**問題 3.** 任一個無橋 3-正則圖都可以用  $H$  中的元素來著色  $G$  的邊使得任一點的三個相鄰邊它的三個顏色  $a, b, c$ ，恰好滿足  $a + b = c = e$  (單位元素)。

### 7. 跨越數問題 (Crossing Number)。

猜測 1:  $cr(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor / 4$ 。

**猜測 2** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} cr(K_n/n^4) = \frac{1}{64}$  。

(註) 目前已經證明  $\lim_{n \rightarrow \infty} cr(K_n/n^4) \geq \frac{1}{80}$  。

參考資料 : D. Kleitman, The crossing number of  $K_{5,n}$ , JCT(B) 9(1970), 315-323.

**猜測 3** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} cr(Q_n/n^4) = \frac{5}{32}$  。

(註) 目前最好的結果是  $cr(Q_n) \approx \frac{4^n}{20}$  。

參考資料 : T. Madej, Bounds for the crossing number of the n-cube, JGT 15(1991), 81-97.

**猜測 4** :  $cr(C_n \times C_m) = n(m-2)$  where  $m \leq n$  。

(註) 已知結果含蓋  $n \geq 5$  。

$n = m$  是比較困難解決的部份。  
參考資料 : R. Ringelsen 及 L. Beineke , The crossing number of  $C_3 \times C_n$  , JCT(B) 24(1978), 134-136.

令  $\overline{cr}(G)$  代表邊用直線所畫出來圖的最少跨越數。

**問題** : 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{cr}(K_n/n^4)$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{cr}(K_n/n^4)/cr(K_n/n^4)$ 。

參考資料 : H. F. Jenser, An upper bound for the rectilinear crossing number of the complete graph, JCT(B) 10(1971), 212-216.

## 8. Cycle Double Cover Conjecture.

**猜測** : 令  $G$  為一無橋圖,  $2G$  為把  $G$  中的邊都再加入一重邊亦即  $G$  中的邊重複數為 2 (multiplicity) 。

證明  $2G$  可以分割成都是圈的子圖。  
參考資料 : F. Jaeger, A survey of the cycle double cover conjecture, in : Cycles in Graphs (B. Alspach and C. D. Alspach Eds.) Vol 27, Annals of Discrete Math.

North Holl and (1985), 1-12.

### 9. Sixs Perfect Matchings Conjecture.

**猜測** : 令  $G$  為無橋的 3-正則圖, 證明  $2G$  可以分割成 6 個完全配對 (1-factor)。

**參考資料** : P. D. Seymour, On multi-colorings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte, Proceedings of London Math. Soc. (3), 38(1979),432-460.

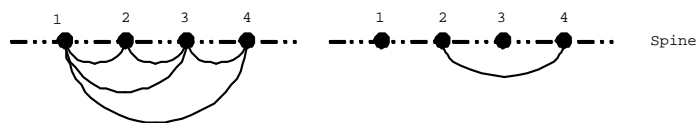
### 10. 跨越數問題的複雜度 (Complexity)。

**問題** : 令  $G$  為一 3-正則圖,  $k$  為一正整數, 判斷 " $cr(G)$  是否為  $k$  "的複雜度"是否為 NP-complete?

### 11. 書式嵌入問題 (Book-Embedding)。

所謂的頁 (page) 是一個封閉的半平面, 而一本書是由許多頁所形成的集合, 而且這些頁有一共同的邊 (Spine)。圖  $G$  的書式節入 (Book embedding) 是把  $G$  的點全部排在共同邊 (Spine) 上, 同時把邊畫在頁上, 使得在同一頁的邊彼此都沒有跨越。我們  $pn(G)$  代表所需要的最少頁數。

**例.**  $pn(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ 。



**問題 1.**  $pn(K_{n,m}) = ?$

(註) 已知  $pn(K_{n,m}) \leq \lceil (2n + m)/4 \rceil$ , 而且  $n = m$  時, 這是最好的結果。

**問題 2.**  $pn(K_n \times K_m) = ?$

**參考資料** : D. J. Muder, M.L. Weaver, and D. B. West, Page number of complete bipartite graphs, J. Graph Theory 12(1988), 469-489.

## 12. 鳥籠的連通數 (Connectivity of Cages)。

問題：決定  $(\delta, g)$ -cage 的通數。

猜測：每一個  $(\delta, g)$ -cage 是  $\delta$ -連通。

猜測：除了  $(3,5)$ -cage 之外，其它的 cage 都是哈密爾頓圖。

參考資料：H. L. Fu, K. C. Huang and C. A. Rodger, Connectivity of cages, JGT(24), 1997, 187-191.