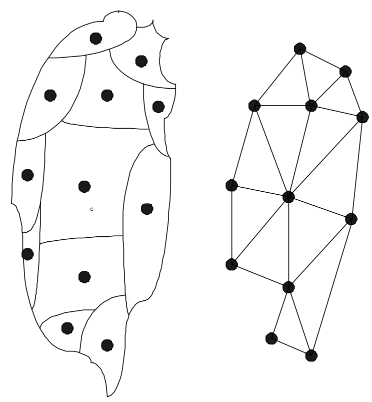
第四章　圖的著色 (Graph Coloring)

自從四色問題在十九世紀中葉被提出來之後, 圖的著色問題成爲研究圖論的重點課題, 幾乎所有的圖論學者都曾參與, 或盡其一生研究這個富有色彩的專題。

最早出現的問題是談到如何利用顏色來分辨地圖上不同的國家或地區; 譬如圖一的台灣本島的縣分佈圖, 在最節省的情況下, 要用多少個顏色才能把各個縣都塗上顏色, 使得相鄰的縣都塗上不同的顏色, 以免造成區域無法分辨的現象。

經過多次的試驗, 甚至包括環繞在四週的海洋也要塗上不同顏色來區分海面與陸地, 一共只需要四個顏色就夠了, 而且非得使用四個顏色不可, 你知道爲什麼嗎? 研究平面地圖是否可以用四個顏色來著色使得上色之後國界得以分辨, 就是所謂的四色問題。

研究上述問題可以先把它轉成圖的模式 (Graph Model): 把要上色的每個區域用區域內的一點代表 (例如縣用縣治), 然後, 相鄰兩區域的代表點用邊相連, 於是得到一個圖。這麼一來, 地圖的著色就等價於轉換出來的圖的點著色。



圖一: 台灣地圖及其縣對應圖 (模擬)

1. 點著色 (Vertex Coloring)

對於圖 G, 一個圖 G 的點著色是指一個由 $V(G)$ 映至 N 的函數 φ, 它滿足當 u 與 v 爲 G 中相鄰的兩點時, $\varphi(u) \neq \varphi(v)$。當 $|\varphi(V(G))| = k$ 時, 則 φ 又稱爲是 G 的一個 $k-$著色, 也就是用了 k 個顏色的著色方法。由於 k 最大也不會超過 $|V(G)|$, 所以研究所需要的最少顏色數就是我們研究點著色的主題。

定義 1.1. (點著色數, Chromatic Number)
一個圖的點著色數 $\mathcal{X}(G) = \min\{k|\, G$ 可以用 k 個顏色塗好$\}$。

所以在上述定義中, 可以用 k 個顏色塗好, 也可以敍述成 G 是 $k-$可著色 (k-colorable)。

以下的幾個命題提供了點著色的一些基本性質。

命題 1.2. 令 $\omega(G)$ 代表 G 中最大完全子圖的點數, 則 $\mathcal{X}(G) \geq \omega(G)$。

證明. 因爲完全子圖的點兩兩相鄰, 所以全部都會塗上不同顏色。 ■

命題 1.3. $\mathcal{X}(G) \leq \Delta(G) + 1$。

證明. 不斷地用 $\{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ 中的顏色來塗點, 使得它滿足點著色的基本條件, 最後一定可以完成 (每一點都有剩下的顏色可以用)。 ■

($*$) 上述證明中所用的著色方法, 一般也稱爲是 Greedy Coloring。

命題 1.4. 當 $G \cong K_n$ 或 C_{2n+1} 時, $\mathcal{X}(G) = \Delta(G) + 1$。

命題 1.5. 令 G 的度數列 (Degree Sequence) 爲 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p$, 則 $\mathcal{X}(G) \leq 1 + \max\limits_{i=1,2,\ldots,p} \min\{d_i, i-1\}$。

證明. 令 G 中的點集合爲 $\{v_i|\, i = 1, 2, \ldots, p\}$ 且 $\deg(v_i) = d_i$。然後由 v_1 開始著色, 於是要塗 v_i 時已經用過的顏色最多只有 $\min\{d_i, i-1\}$, 因此在顏色比 $\max\limits_i \min\{d_i, i-1\}$ 多 “1” 的情況下一定可以完成著色。 ■

命題 1.6. 令 $\beta(G)$ 代表 G 中彼此不相鄰最大點集合的點數 (獨立數, Independence Number), 則 $\mathcal{X}(G) \geq \frac{|V(G)|}{\beta(G)}$。

證明. 著相同顏色的點形成一個獨立集 (Independent Set)。 ■

爲了進一步探討著色數, 以下的臨界概念是不可或缺的。

定義 1.7. (k–臨界圖, k-critical graphs)

若是 $\mathcal{X}(G) = k$, 而且對於所有 G 的正規 (proper) 子圖 H, $\mathcal{X}(H) < k$, 則 G 稱爲是一個 k–臨界圖。

引理 1.8. 若是 G 爲一個 k–臨界圖, 則 G 的最小度數 $\delta(G) \geq k-1$。

證明. 如果 $\delta(G) < k-1$, 令 $\deg(v) = \delta(G)$。現在, 先用 $k-1$ 個顏色塗好 $G-v$, 再塗 v 即可完成著色, 如此一來 G 的著色數不大於 $k-1$, 與假設矛盾, 因此 $\delta(G) \geq k-1$。 ■

定理 1.9. (Szekeres-Wilf, 1968) $\mathcal{X}(G) \leq 1 + \max\limits_{H \leq G} \delta(H)$。

證明. 令 $\mathcal{X}(G) = k$, 則必定存在一個 G 的子圖 G', 它是一個 k–臨界圖。由引理 1.8, $\mathcal{X}(G) - 1 = k - 1 \leq \delta(G') \leq \max\limits_{H \leq G} \delta(H)$。 ■

命題 1.3 , 1.5 及定理 1.9 有一共通性, 它們可以看成是下面定理的推論。

定理 1.10. 令 f 爲定義於所有圖所成集合 $\mathcal{G}$ 的一個實値函數, 同時 f 滿足以下兩個性質:

(i) 若 $H \leq G$, 則 $f(H) \leq f(G)$。

(ii) 對於所有圖 G, $f(G) \geq \delta(G)$。

則 $\mathcal{X}(G) \leq 1 + f(G)$。

證明. 令 $\mathcal{X}(G) = k$, 則必存在一個 G 的子圖 G', 它是一個 k–臨界圖, 於是由引理 1.8, $\delta(G') \geq k-1$, 所以 $f(G) \geq f(G') \geq \delta(G') \geq k-1$, 於是 $\mathcal{X}(G) = k \leq 1 + f(G)$。 ■

由觀察, 命題 1.3 , 1.5 及定理 1.9, 分別令 $f(G)=\Delta(G)$, $f(G)=\max_i \min\{d_i, i-1\}$ 以及 $f(G)=\max_{H\leq G}\delta(G)$。如果令 $f(G)$ 爲 G 中最長路徑的長度 $l(G)$, 則以下的定理自然成立。

定理 1.11. $\mathcal{X}(G)\leq 1+l(G)$。

定理 1.9 尙有一個很重要的應用, 我們先介紹 $k-$退化圖。

定義 1.12. ($k-$退化圖, k-degenerate graph)
一個圖 G, 如果對於任意子圖 H, $\delta(H)\leq k$, 則稱 G 爲 $k-$退化圖。

顯然, 森林爲 1−退化圖, 而平面圖則爲 5−退化圖。

推論 1.13. 若 G 爲一 $k-$退化圖, 則 $\mathcal{X}(G)\leq 1+k$。

證明. 由定理 1.9 可以直接推得這個結論。 ■

有了上述的推論, 要求出某些圖的點著色數就需要探討該圖的結構。例如, 外平面圖 (Outerplanar Graph), 它的所有點都落在一個圈上, 而且圈的外部沒有任何邊; 這樣的圖可以證明是 2−退化圖, 於是它的點著色數不大於 3, 又因爲外平面圖中可能有三角形, 於是 3 成爲最好的答案。

定理 1.14. (König, 1995) 令 G 爲一外平面圖, 則 $\mathcal{X}(G)\leq 3$。

著色數與點度數的相關定理最值得一提的是 Brooks 在 1941 年所證明的結果, 後世人則以 Brooks 定理稱呼它。

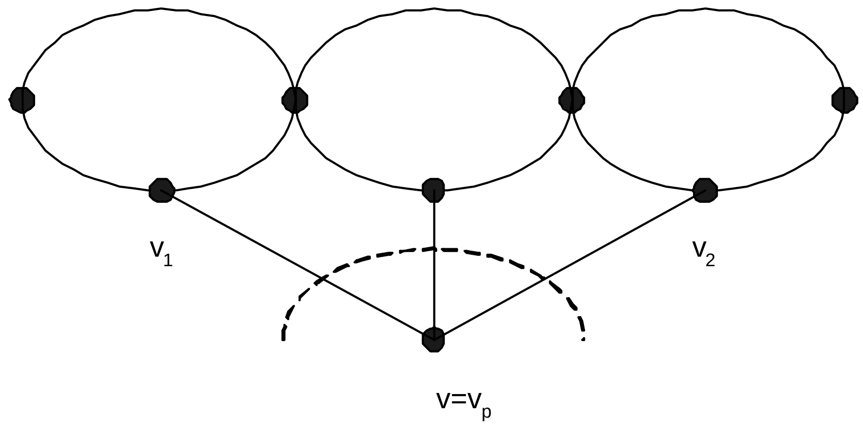
定理 1.15. (Brooks 定理) 令 G 爲不是完全圖或奇數圈的連通圖, 則 $\mathcal{X}(G)\leq \Delta(G)$。

證明. 當 $\Delta(G)=k\leq 2$ 時很容易看出來定理成立, 以下我們考慮 $\Delta(G)=k\geq 3$。首先, 如果 G 不是 $k-$正則圖, 則令 $v\in V(G)$ 而且 $\deg(v)<k$。因爲 G 是連通圖, 所以有懸掛樹 T, 它是以 $v=v_p$ $(p=|V(G)|)$ 爲根而生成出來的樹, 現在按離開 v_p 的距離依次把點標示成 $v_{p-1}, v_{p-2}, \ldots, v_1$。由於 v 以外的每一個點至少和一個底標較大的點相鄰, 所以每一個點都可以用 k 色的 Greedy Coloring 來著色: 由 v_1 開始, 依次著色 (不相鄰塗上同色); 現在到 v_p 時, 因爲 $\deg(v_p)<k$, 所以必定有一色可以用, 這證明了 $\mathcal{X}(G)\leq k$。

現在考慮當 G 爲正則圖的情況。如果在 G 中有一切點 (Cut vertex) v, 則 $G-v$ 爲不連通圖, 而且不是正則圖, 所以每個部分都可以用 k 個顏色塗好, 現在, 只要調整與 v 相鄰點 (在 G 中) 的顏色即可空出 k 色中的一色來塗 v, 定理得證。如果 G 中無切點, 我們希望找到三點 v_1, v_2, v, 使得 $v_1 \sim v$, $v \sim v_2$, v_1 與 v_2 的距離 $d(v_1, v_2) = 2$, 而且 $G - v_1 - v_2$ 爲連通圖; 如果這件事可以辦到, 則由 v_1, v_2 塗上同一顏色開始, 利用 Greedy Coloring 最後塗 v 即可 (同上方法)。我們分兩種情況討論:

(i) $\kappa(G-v) \geq 2$。除非 G 是完全圖, 否則一定可以找到 v_1, v, v_2。 (?)

(ii) $\kappa(G-v) = 1$。在去掉 v 之後, $G-v$ 的圖如下, 因此選來自不同 Blocks 的 v_1, v_2 即可。 ■



2. 完美圖 (Perfect Graph)

在前面, 我們提到 $\mathcal{X}(G) \geq \omega(G)$, 在這裡我們討論在什麼情況下, $\mathcal{X}(G)$ 與 $\omega(G)$ 會是相等。

定義 2.1. 相交圖 (Intersection Graph)

令 F 代表一個由非空集合所形成的集合族。令 $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$。則 F 的相交圖 G 是以 $A_1, A_2, \ldots, A_p$ 爲頂點, 同時 $A_i \sim A_j$ 若且唯若 $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $1 \leq i \neq j \leq p$。

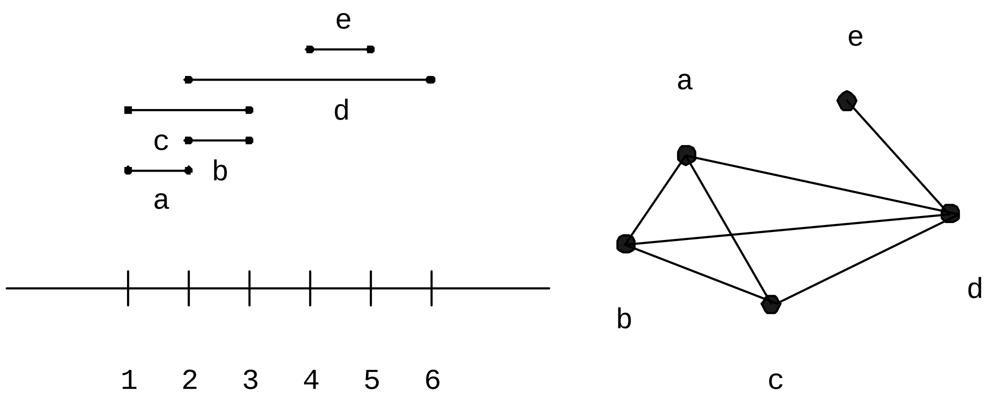
例. 令 (S, T) 爲一個 $STS(7)$, 則 T 的相交圖爲 K_7。

例. 令 (S, T) 爲一個 $STS(v)$, 則 T 的相交圖爲一正則圖同時每一點的度數均爲 $\frac{3(v-3)}{2}$。

定義 2.2. 區間圖 (Interval Graph)

令 F 爲實數線上的一些閉區間所成的集合, 則 F 的相交圖也稱爲是區間圖。

例. 令 $F = \{[1,2], [1,3], [2,3], [2,6], [4,5]\}$, 則 F 的相交圖如下:



區間圖在應用上扮演很重要的角色, 例如 DAN 的排序; 而它在點著色方面也有非常漂亮的結果。

定理 2.3. 令 G 爲一區間圖, 則 $\mathcal{X}(G) = \omega(G)$。

證明. 因爲 R 是有序體 (Ordered Field), 令 G 中的 v_i 對應於區間爲 $[l_i, r_i]$, $i = 1, 2, \ldots, p$, 同時 $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_p$。現在利用 Greedy Coloring 由 $v_1, v_2, \ldots$ 的次序依次著色, 則所得到的顏色數即爲 $\mathcal{X}(G)$ 只要證明最多用了 $\omega(G)$ 個顏色即可。

假設在塗 v_i 顏色時用 k 來著色, 這表示在使用 k 之前的 $1, 2, \ldots, k-1$ 都不能用, 於是這 $k-1$ 個顏色出現在 $N(v_i) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ 的點上。令出現顏色 $1, 2, \ldots, k-1$ 的點分別爲 $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k-1}}$。我們證明這些點加上 v_i 將導出一個 k 點的完全圖。由點與區間的對應, 我們知道 $l_{i_1} \leq l_{i_2} \leq \cdots \leq l_{i_{k-1}} \leq l_i$。現在, 如果上述的 k 個實數都相等, 則 k 點的完全圖就順利求得。不然的話, 令 t 爲介於 1 與 $k-1$ 的一個整數, 它滿足對於所有的 j, $1 \leq j \leq t$, $l_{i_j} < l_i$, 但是對於 $t+1 \leq j \leq k-1$, $l_{i_j} = l_i$。於是 $v_{i_{t+1}}, v_{i_{t+2}}, \ldots, v_i$ 形成一完全子圖; 再看 v_{i_j}, $1 \leq j \leq t$, 由於 $v_{i_j} \sim v_i$, 所以 $r_{i_j} \geq l_i$, 這表示 $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_t}$ 都會對應於包含 l_i 的區間, 所以 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k-1}}, v_i\}$ 導出一個完全圖。

由於顏色 k 出現時就會有一個具有 k 點的完全子圖, 所以 $\mathcal{X}(G) \leq \omega(G)$。再由命題 1.2, $\mathcal{X}(G) \geq \omega(G)$, 所以定理得證。 ■

定義 2.4. (完美圖, Perfect Graph)

如果對於所有 G 的導出子圖 H, $\mathcal{X}(H) = \omega(H)$, 則 G 稱爲弱完美圖 (Weakly Perfect Graph)。

顯然完美圖一定是弱完美圖, 但是反過來不一定對 (?)。

例. 令 H 爲 C_5, 顯然 $\mathcal{X}(H) \neq \omega(H)$。

例. 二分圖爲完美圖。

例. 區間圖爲完美圖。

以下我們討論最出名的一類完美圖。

定義 2.5. (弦圖, Chordal Graph, Triangulated Graph)

一個圖中, 如果對於所以長度大於 3 的圈都有一個邊連接兩個不連續的點, 則這個圖稱爲是弦圖。

定理 2.6. (Hajnal and Surányi, Dirac)

一個圖 G 是弦圖的充要條件爲 G 是完全圖, 或是由兩個點數比 $|V(G)|$ 少的兩個弦圖 G_1 及 G_2, 經過重疊完全子圖所得到的圖。

證明. ($\Leftarrow$) 直接由定義可以看出來。

($\Rightarrow$) 由於完全圖是弦圖, 我們考慮當 G 不是完全圖的情況, 同時令 S 爲使得 $G-S$ 不連通的最小集合, A 爲 $G-S$ 中的一個部分, 以及 $B = V(G)-S-A$。現在, 再令 $G_1 = \langle A\cup S\rangle_G$, $G_2 = \langle B\cup S\rangle_G$。只要我們能證明 $\langle S\rangle$ 爲 G 的完全子圖, 則定理得證。

顯然當 $|S| = 1$ 時成立, 令 $|S| \geq 2$。由於 S 爲最小的集合, 對於 S 中的任意點 x, 它必定與 $G-S$ 中所有部分中的某點相連, 否則不必去掉全部 $S(S')$ 就已經使得 $G-S'$ 爲不連通圖。因此, 對於 S 中的任意兩點 x 與 y, 必存在兩條最短路徑 $x, a_1, a_2, \ldots, a_r, y$; $x, b_1, b_2, \ldots, b_s, y$, 其中 $a_i \in A$, $b_j \in B$。於是 $C : (x, a_1, a_2, \ldots, a_r, y, b_s, b_{s-1}, \ldots, b_1)$ 爲一圈, 長度不小於 4。現在, 由於在 A 中的點 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 與在 B 中的點 $b_1, b_2, \ldots, b_s$ 皆不會自已相連, 再加上 a_i 不會連 b_j, 使得 $xy \in E(G)$ (弦圖)。定理得證。 ■

利用上述定理, 我們可以證明弦圖也是弱完美圖。

定理 2.7. 如果 G 爲一弦圖, 則 $\mathcal{X}(G) = \omega(G)$。

證明. 對點數歸納, 顯然 $|V(G)| = p = 1$ 時必成立。令點數小於 p 時皆成立。現在考慮具有 p 點的弦圖 G。首先, 如果 G 是完全圖, 顯然定理成立。假設 G 不是完全圖。則由定理 2.6, G 可以由 G_1 與 G_2 重疊一部份完全圖而獲得, 令 S 爲重疊部分的點集合。由於 $V(G_1)\backslash S$ 與 $V(G_2)\backslash S$ 沒有邊相連, 所以 $\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$, 而在著色方面則有 $\mathcal{X}(G) \geq \max\{\mathcal{X}(G_1), \mathcal{X}(G_2)\}$。實際上, 不難看出 $\mathcal{X}(G) = \max\{\mathcal{X}(G_1), \mathcal{X}(G_2)\}$ (?)。現在, 由歸納假設 $\mathcal{X}(G_1) = \omega(G_1)$, $\mathcal{X}(G_2) = \omega(G_2)$, 所以 $\mathcal{X}(G) = \omega(G)$, 定理得證。 ■

完美圖的概念, 最早是由 Berge 在 1961 年提出來, 同時他也猜測 G 是完美圖若且唯若 $\overline{G}$ 是完美圖, 這個也被稱爲完美圖猜測(Perfect Graph Conjecture), 它在 10 年後被 Lovász 證明是正確的, 於是成爲著名的定理。

定理 2.8. (Lovász) 一個圖 G 是完美圖若且唯若 $\overline{G}$ 是完美圖。

要證明這個定理, 由於 Fulkerson 的協助已不是很困難, 讀者可以參考 Doug West 的圖論教材, 209–211, 在此省略細節。

在完美圖的研究, 最著名的莫過於強完美圖猜測 (Strong Perfect Graph Conjecture, SPGC), 這個猜測目前已獲得證實。

強完美圖定理 [Chudnovsky 等人, 2003].. 一個圖 G 是完美圖的充要條件爲 G 或 $\overline{G}$ 不含任何圈中無弦之奇數邊的圈。

儘管完美圖的研究如火如荼, 另一方面的觀察 $\mathcal{X}(G) \neq \omega(G)$ 是無法避免的。例如 $\omega(C_5) = 2$, 但是 $\mathcal{X}(C_5) = 3$; 實際上, 我們可以建構一個圖 G, 它滿足 $\mathcal{X}(G) - \omega(G)$ 要多大都可以哩!

3. $k-$著色圖的結構 (k-Chromatic Graphs)

一個圖 G 如果已知 $\mathcal{X}(G)=k$, 則必然 $\omega(G)\leq k$; 可是, 在 $\omega(G)\leq k$ 的情況下 $\mathcal{X}(G)$ 可能會很大, 以下的一族圖是由 Mycielski 所提供, 在圖中沒有任何的三角形, 不過 $\mathcal{X}(G)$ 可以隨著 $|V(G)|$ 的變大而增大。

定理 3.1. 對於所有的 $k\geq 1$, 都存在一個不含三角形的圖, 它的著色數爲 k。

證明. 對 k 歸納, 顯然當 $k=1$, 2 或 3 時, K_1, K_2 及 C_5 分別爲所求的圖。現在, 假設 H 爲不含三角形的 $k-$著色圖, 其中 $k\geq 3$。令 $V(H)=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}$。以下我們利用 H 來建構一個不含三角形的 $(k+1)-$著色圖 G。

令 $V(G)=\{u,u_1,u_2,\ldots,u_p,w_1,w_2,\ldots,w_p\}$, $E(G)=\{uu_i|\, i=1,2,\ldots,p\}$ $\cup\{u_iw_j|\, v_j\sim v_i,\ i=1,2,\ldots,p\}\cup\{w_hw_l|\, v_h\sim v_l\}$。於是, G 不含三角形及 $\mathcal{X}(G)=k+1$ 都很容易核對。以下就著色方面加以說明: 首先, 令 φ 爲 G 的點著色它滿足 (1) $\varphi(u_i)=\varphi(w_i)$ 同時 $\varphi(w_i)$ 爲 H 中 v_i 的顏色, 及 (2) $\varphi(u)$ 爲第 $k+1$ 色。於是, $\mathcal{X}(G)\leq k+1$。另一方面, 如果 $\mathcal{X}(G)=k$ 令 $\varphi(u)=c$, $1\leq c\leq k$。由於 $\mathcal{X}(H)=k$, 在 H 中有一些點 v_i 它們的顏色是 c, 現在用 $\varphi(u_i)$ 來取代 v_i 的顏色, 則 H 中不再用到 c 這個顏色, 同時, 著色也沒有問題, 因爲與 v_i 相鄰點的著色都會與 v_i 的顏色不同。((註) $\langle\{w_1, w_2,\ldots,w_p\}\rangle_G\cong H$) 這與 $\mathcal{X}(H)=k$ 矛盾, 所以 $\mathcal{X}(G)\geq k+1$, 定理得證。 ■

定理 3.1 不久有了很大的擴展, 不但沒有三角形的圖可能有極大的著色數; 在最小圈的大小 g (girth) 任意給定後, 著色數爲 k 的這類圖仍然存在。

定理 3.2. (Erdös及 Lovász)

對於任意的 $k\geq 2$ 及 $g\geq 3$ 都存在有 $k-$著色圖 G 其中 G 的最小圈長 $g(G)>g$。

證明. 以下是利用機率的方法來證明 (Probabilistic Method)。

當 $k=2$, 只要找偶圈即可, 所以令 $k\geq 3$。再令 $0<\theta<\frac{1}{g}$, n 爲固定的正整數, 以及 $p=n^{\theta-1}$。現在, 考慮 n 個點的隨機圖 (Random Graph) G, $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 它的邊是根據 n 而隨機選擇 (邊與邊是獨立的

關係)。也就是說, 對於任一邊 n 出現的機率爲 p, 以 $P[v_iv_j \in E(G)] = p$ 表示。對於圖的選擇而言, 由於點已標示, 所以一共有 $2^{\binom{n}{2}}$ 不相同的標示圖。因此, m 邊圖出現的機率爲 $p^m(1-p)^{\binom{n}{2}-m}$。

現在令 X 爲一隨機變數它給定圈長至多爲 g 的圈數。於是

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=3}^{g} \binom{n}{i}\frac{i!}{2i} = \sum_{i=3}^{g} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{2i}\,, \\ E(X) &= \sum_{i=3}^{g} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{2i}\, p^i \quad (C_i \text{ 出現的機率爲 } p^i\text{。}) \\ &\le \sum_{i=3}^{g} \frac{n^i}{2i}\, n^{(\theta-1)i} \qquad (p = n^{\theta-1}) \\ &= \sum_{i=3}^{g} \frac{n^{\theta i i}}{2i}\text{ 。} \end{aligned}$$

由於 $0 < \theta < \frac{1}{g}$, 所以必存在有一個實數 $0 < \varepsilon < 1$ 使得 $\theta g = 1 - \varepsilon$。因此 $\frac{E[X]}{n/2} \le \sum_{i=3}^{g} \frac{n^{\theta i}}{n_i} \le (\sum_{i=3}^{g} \frac{1}{i}) n^{-\varepsilon}$, 也就是說

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[X]}{(n/2)} = 0\text{ 。} \tag{1}$$

由 Markov 的不等式 $P[X \ge \frac{n}{2}] \le \frac{E[X]}{n/2}$ 知道當 n 足夠大時

$$P\left[X \ge \frac{n}{2}\right] \le \frac{1}{2}\text{ 。 (由(1) 式)} \tag{2}$$

從另一方面看, 令 $t = \lfloor \frac{3(\ln n)}{p} \rfloor$。在 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 中找到一個獨立 $t-$子集的機率爲 $(1-p)^{\binom{t}{2}}$。因爲 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 中恰有 $\binom{n}{t}$ 個 $t-$子集, 所以, 獨立數 $\beta(G) \ge t$ 的機率不大於 $\binom{n}{t}(1-p)^{\binom{t}{2}}$。然而, $1 - p < e^{-p}$ 所以 $P[\beta(G) \ge t] < \binom{n}{t} e^{-p\binom{t}{2}} < (ne^{-p(t-1)/2})^t$。由 t 的選擇 $n \le e^{\frac{pt}{3}}$, 所以在 n 夠大時,

$$ne^{-p(t-1)/2} < 1 \;\text{ 同時 }\; P[\beta(G) \ge t] < \frac{1}{2}\text{ 。} \tag{3}$$

對於上述的 n, 由 (3) 我們可以得到

$$P\left[\beta(G) < t \text{ 且 } X < \frac{n}{2}\right] > 0\text{ 。}$$

因此, 存在一個圖 G, 在 G 中圈長不大於 g 的圈數比 $\frac{n}{2}$ 少, 且 $\beta(G) < t$。現在, 又因爲 $t = \lfloor \frac{3(\ln n)}{p} \rfloor = \lfloor 3(\ln n) n^{1-\theta} \rfloor$, 當 n 夠大時, $t < \frac{n}{2k}$ (自己選)。

最後, 對於 G 中長度不大於 g 的每一個圈上都選一點將它去掉, 如此一來所得到的新圖 G^* 會滿足下列的性質:

(a) $|V(G^*)| \geq \frac{n}{2}$。

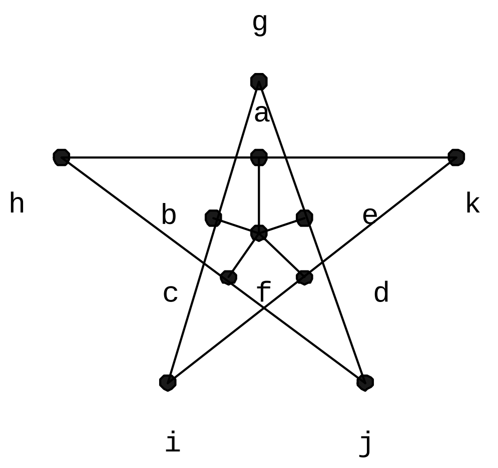
(b) $\beta(G^*) \leq \beta(G) < \frac{n}{2k}$。

所以,

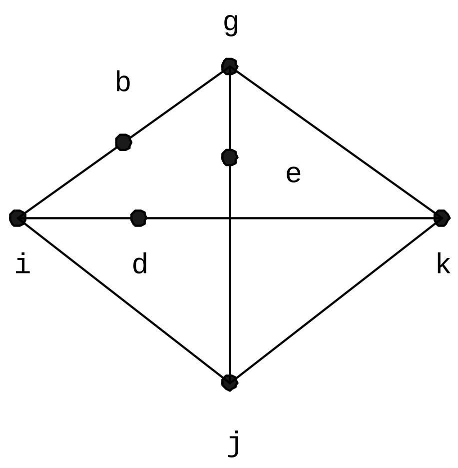
$$\mathcal{X}(G^*) \geq \frac{|V(G^*)|}{\beta(G^*)} \geq \frac{n/2}{n/2k} = k \text{ 。}$$

由於 G^* 著色數以不小於 k, 只要再從 G^* 中去掉一些點即可求得點著色數爲 k, 且最小圈長不大於 g 的圖。 ■

儘管沒有三角形的圖它的著色數可以很大, 例如下圖 (a) 的著色數爲 4, 當然也不會有 K_4, 不過, K_4 是否會以另一種型態隱藏在圖中呢? 圖 (b) 告訴我們, 圖中含有一個 K_4 的邊細分 (Subdivision), 事實上, Dirac證明了這種形式的定理。



(a)



定理 3.3. 一個 4–著色圖中必含有 K_4 的一個邊細分。

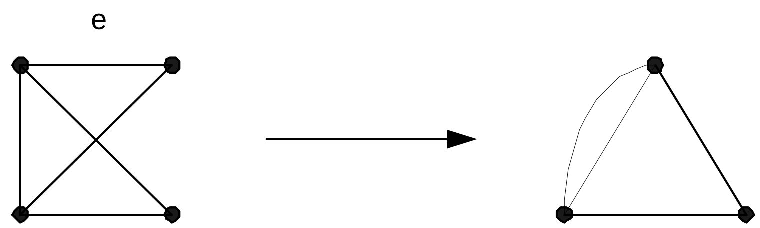
接著 Hajos 猜測上述定理對於一般的 $k \geq 5$ 也對, 也就是說 k–著色圖中必含有一完全圖 K_k 的邊細分。很不幸的是, 這猜測在 $k \geq 7$ 時已經被證明有錯, 至於 $k = 5$ 或 6, 目前仍是未知。

有了上面的經驗, Hadwiger作了以下的猜測:

Hadwiger's Conjecture.

如果 G 是一個 k–著色圖, 則 K_k 可以由 G 經過壓縮 (Contraction) 而得 (K_k 是 G 的一個 Subcontraction)。
(註) 這裡指的是邊壓縮; 去掉邊, 再把邊的兩點合成一點。

例. 壓縮 e



這個猜測目前在 $k \leq 6$ 時皆已證實, $k \geq 7$ 時則是未知。

在這一節的最後, 我們介紹一個非常出色的不等式, 一般也稱爲是 Nordhaus 及 Gaddum 的不等式。

定理 3.4. 令 G 爲具有 p 點的圖, 則

(1) $2p^{1/2} \leq \mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\overline{G}) \leq p+1$。

(2) $p \leq \mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G}) \leq (\frac{p+1}{2})^2$。

證明. 先證 (2) 的下界。令 φ 與 ψ 分別爲 G 爲 $\overline{G}$ 的點著色, 同時分別用了 $\mathcal{X}(G)$ 與 $\mathcal{X}(\overline{G})$ 個顏色。現在我們用 $(\varphi(v), \psi(v))$ 來塗 K_k 的點 v, 於是 $\mathcal{X}(K_p) \leq \mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G})$, 所以 $p \leq \mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G})$。利用算數平均不小於幾何平均的概念, $\mathcal{X}(G) + \mathcal{X}(\overline{G}) \geq 2(\mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G}))^{1/2} \geq 2p^{1/2}$, 所以 (1) 的下界得證。

再看 (1) 的上界。令 $k = \max\{\delta(H) | H$ 爲 G 的導出子圖$\}$, 於是 $\mathcal{X}(G) \leq 1+k$, 接著再看 $\overline{G}$ 的導出子圖 H', 我們可以證明 $\delta(H') \leq p-k-1$ (?)。所以 $\mathcal{X}(\overline{G}) \leq 1+(p-k-1) = p-k$, (1) 的上界得證。同理 $\mathcal{X}(G)\mathcal{X}(\overline{G}) \leq (\frac{\mathcal{X}(G)+\mathcal{X}(\overline{G})}{2})^2 \leq (\frac{p+1}{2})^2$。 ■

4. 臨界圖(Critical Graphs) 與點著色多項式 (Chromatic Polynomial)

定義 4.1. (Color-critical)

假如 $\mathcal{X}(G) = k$, 但是對於任意的 $H < G$ 且 $\mathcal{X}(H) < k$, 則 G 稱爲是著色的 k–臨界圖, 或簡稱 k–臨界圖。爲了方便說明, 我們重複以下的性質。

引理 4.2. 令 H 爲一 k–臨界圖, 則 $\delta(H) \geq k-1$。

證明. 令 x 爲 H 中的任一點, 則 $\mathcal{X}(H-x) = k-1$。現在, 如果 $\deg(x) < k-1$, 則在 $1, 2, ..., k-1$ 中必有一色可以用來塗 x, 使得 $\mathcal{X}(H) \leq k-1$, 這與假設矛盾, 所以引理得證。 ■

引理 4.3. H 爲 k–臨界圖的充要條件爲 (1) H 沒有孤立點, 及 (2) 對於任意的邊 $e \in E(H)$, $\mathcal{X}(H-e) < \mathcal{X}(H)$。

證明. ($\Rightarrow$) 顯然成立。

($\Leftarrow$) 因爲 H 沒有孤立點, 所以對於任意的 $x \in V(H)$, $\mathcal{X}(H-x) = \mathcal{X}(H-U) < \mathcal{X}(H)$, 其中 $U = \{xv|\, v \in N(x)\}$。因此, 對於任意 H 的子圖 H', $\mathcal{X}(H') < \mathcal{X}(H)$。 ■

引理 4.4. 假如 $v \in V(G)$ 而且 $\mathcal{X}(G-v) < \mathcal{X}(G) = k$, 則 G 有一個 k–著色 φ, 它滿足 $|\varphi(N(v))| = k-1$, 同時對於其它的 $u \notin N[v]$, $\varphi(v) \neq \varphi(u)$。

證明. 如果 $|\varphi(N(v))| < k-1$, 則顯然 $\mathcal{X}(G) \leq k-1$。至於 $\varphi(v)$ 只出現一次也很容易看出來。 ■

引理 4.5. 如果 $\mathcal{X}(G-e) < \mathcal{X}(G) = k$, 則對於 $G-e$ 的任意 $(k-1)$–著色, e 的兩個端點都會塗上相同的顏色。

證明. 不然的話, 加 e 回去即可 (不會影響著色數)。 ■

引理 4.6. (Kainen) 令 G 滿足 $V(G) = X \cup Y$ 以及 $\mathcal{X}(G) > k$。則在 $\langle X\rangle_G$ 與 $\langle Y\rangle_G$ 分別爲 $k-$可著色圖時, $[X, Y] = \{xy \in E(G) | x \in X,\ y \in Y\}$ 至少具有 k 個邊。

證明. 假設 $|[X, Y]| < k$。由於 $\langle X\rangle_G$ 與 $\langle Y\rangle_G$ 分別爲 $k-$可著色圖, 令它們的顏色數 (塗相同顏色的點集合) 分爲 $X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$。顯然這些集合都是獨立集。現在, 定義一個二分圖 H, 其中 $V(H) = \{X_1, X_2, \ldots, X_k; Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ 以及 $X_{i \sim_H} Y_j$ 若且唯若在 G 中, 沒有邊連接 X_i 中的點與 Y_j 中的點。所以當 $|[X, Y]| < k$ 時, $|E(H)| > k(k-1)$, 於是 H 具有完全配對 P (?)。於是, 只要在 $X_{i \sim_H} Y_j$ 時, 把 X_i 與 Y_j 的都塗上同一色, 則 $\mathcal{X}(G) \le k$, 這與假設矛盾, 所以 $|[X, Y]| \ge k$。 ■

定理 4.7. (Dirac, 1953)

任一個 $k-$臨界圖都是 $(k-1)-$邊連通圖。

證明. 任意最小的邊切集 $[X, Y]$, $|[X, Y]| \ge k-1$。($\mathcal{X}(G) = k$, $\mathcal{X}(\langle X\rangle_G)$ 及 $\mathcal{X}(\langle Y\rangle_G)$ 皆小於 k。) ■

接下來, 我們討論著色多項式。

定義 4.8. 定義 $\mathcal{X}(G; k)$ 爲由 $V(G)$ 映至 $\{1, 2, \ldots, k\}$ 所有不同的點著色函數之個數。

所以 G 爲 $k-$可著色之充要條件爲 $\mathcal{X}(G; k) \ge 1$。$\mathcal{X}(G; k)$ 也稱爲是 G 的 $k-$著色多項式 (k-Chromatic Polynomial)。

例. $\mathcal{X}(K_n; n) = n!$, $\mathcal{X}(K_n; m) = m^{\underline{n}}$, $m > n$。

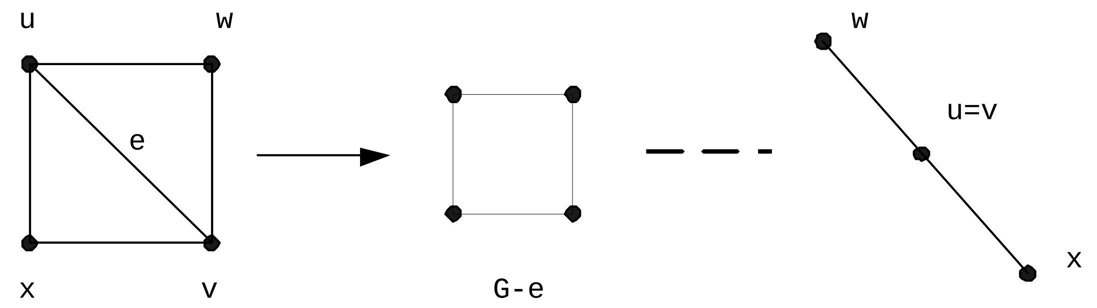
引理 4.9. 令 T 爲具有 n 點的樹圖, 則 $\mathcal{X}(T; k) = k(k-1)^{n-1}$。

證明. 除了第一點 (Root) 有 n 個選擇之外, 其它各點均有 $k-1$ 個選擇。■

定理 4.10. 令 $e \in E(G)$, 則 $\mathcal{X}(G;k) = \mathcal{X}(G-e;k) - \mathcal{X}(G \cdot e;k)$, $G \cdot e$ 代表把 G 中的 $e = uv$ 縮成一點 (Contract uv)。

證明. 因爲 $e = uv$, 所以 G 的一個 k–著色可以來自 $G-e$ 的 k–著色同時滿足 u 與 v 塗不同的顏色; 因此在 $G-e$ 的 k–著色函數中要扣除 u 與 v 同色的情形, 而 u 與 v 同色的情形就等於是在算 $\mathcal{X}(G \cdot e;k)$, 所以定理得證。■

例.



定理 4.11. $\mathcal{X}(G;k)$ 爲 k 的 $|V(G)|$ 次多項式, 它的領導係數爲 1, 第二高次數項的係數爲 $-q$, 其中 $q = |E(G)|$。

點著色的應用:

點著色有不少實際上的應用, 以下就以幾個例子分別說明。

1. 收音機頻率的指定

在這個圖的模式中我們把所有的發射站看成是圖的點; 而發射範圍有重疊的兩個發射站在圖中所對應的兩點有邊相連。現在, 假設相鄰的兩個發射站在使用相同頻率發射時會互相干擾, 於是圖的不同顏色可以用來代表不同的頻率, 因此, 點著色數代表所需使用的最少相異頻率數。

2. 化學物品的收藏

在這個模式中, 不同的化學物品代表點, 而放在一起可能會造成燃燒或爆炸的兩種物品所對應的點有邊相連, 於是點著色數對應到貯存這些物品所需要的最少貯存房間。

3. 學校排課 (以學生爲主)

在這個模式中, 課程代表點, 而當一個學生在預註册時同時選了某兩門課時, 該兩門課所對應的點相連; 於是點著色數代表著總共需要多少時段才能把課程排好, 使得每個學生都能順利選到預註册時所選的課而不會有衝堂。

(註) 假設每一門課每天 (或固定幾天) 都在同一時間上課一小時或兩小時。

4. 立法院開會

這個模式是以各個委員爲點, 而當兩個委員會有共同成員 (某委員) 時, 兩點有邊相連, 於是點著色數代表不同時間開會時段; 在此, 我們假設立法院有很多會議室, 必要時很多委員會可以同時舉行, 而且不會受其它特殊理由而影響開會。

其它尙有非常多的應用, 當然還包括你自己的想像。

5. 邊著色 (Edge-Coloring)

不同於點著色, 邊著色是把顏色塗在邊上。如果一共用了 k 個顏色, 我們稱它是 $k-$ 邊著色 (k -edge-coloring), 而當相鄰的任兩邊都塗上不同顏色的時候, 我們就得到所謂的正規 (Proper) 邊著色。(本節只討論正規邊著色。)

定義 5.1. (正規邊著色)

圖 G 的一個正規 $k-$ 邊著色 π 是一個由 $E(G)$ 映至 $\{1,2,\ldots,k\}$ 的函數, 它滿足當不同的兩邊 $e\cap f\neq\emptyset$ 時 $\pi(e)\neq\pi(f)$; 這個時候 G 也稱爲是一個 $k-$ 邊可著色 (k -edge-colorable)。邊著色 G 所需要的最少顏色數一般以 $\mathcal{X}'(G)$ 表示, 這個數 (Chromatic Index) 一般稱爲是 G 的邊著色數。

以下是幾個基本性質。

命題 5.2. $\mathcal{X}'(C_n)=\begin{cases} 2, & \text{當 } n \text{ 爲偶數,}\\ 3, & \text{當 } n \text{ 爲奇數。}\end{cases}$

命題 5.3. $\mathcal{X}'(G)\geq\Delta(G)$ 。

命題 5.4. 當 G 爲一般圖時, $\mathcal{X}'(G)\leq 2\Delta(G)-1$ 。

命題 5.5. $\mathcal{X}'(K_n)=\begin{cases} n-1, & \text{當 } n \text{ 爲偶數,}\\ \quad n \quad, & \text{當 } n \text{ 爲奇數。}\end{cases}$

證明. 我們證明當 n 爲偶數時 $\mathcal{X}'(K_n)\leq n-1$, 其它的部份也就迎刃而解。令 $V(K_n)=\mathbb{Z}_n$, $n=2m$ 。考慮邊集合, $M_1=\{\{1,0\}\}\cup M$, 其中 $M=\{\{2,2m-1\},\{3,2m-2\},\ldots,\{m-1,m+2\},\{m,m+1\}\}$, 則 M_1 爲 K_n 一個完全配對 (1-factor)。再令 $M_{i+1}=\{\{i+1,0\}\}\cup(M+i)$, $M+i$ 中的元素取 $\bmod n-1$, $i=0,1,2,\ldots,2m-2$ 。於是 K_n 可以寫成 $2m-1$ 個 1-factors 的聯集, 因此 $\mathcal{X}'(K_n)\leq n-1$ 。 ■

(註) $M_2=\{\{2,0\}\}\cup\{\{3,1\},\{4,2m-1\},\ldots,\{m,m+3\}\}$, $M_3=\{\{3,0\}\}\cup\{\{4,2\}$, $\{5,1\},\ldots,\{m+1,m+4\}\}$ 。

命題 5.6. (König, 1916) 當 G 爲二分圖時 $\mathcal{X}'(G)=\Delta(G)$ 。

證明. 先證明當 G 是正則二分圖, 則 $\mathcal{X}'(G) = \Delta(G)$ (?); 然後再證明任一個不是正則的二分圖都可以找到一個超圖 (Supergraph) G' , $G' \geq G$ 而且 G' 是正則二分圖同時 $\Delta(G') = \Delta(G)$ 。 ■

(註) (?) 可以利用 SDR 的概念加以證明。

命題 5.7. 令 P 爲彼得森圖, 則 $\mathcal{X}'(P) = 4$ 。

證明. 由於彼得森圖 (Petersen Graph) 中有 C_5 , 所以 $\mathcal{X}'(P) \geq 3$, 而 $\mathcal{X}'(P) \leq 4$ 很容易看, 所以我們證明 $\mathcal{X}'(P) > 3$ 。假設 $\mathcal{X}'(P) = 3$, 則每個顏色必出現 5 次, 亦即每個顏色的 5 邊會形成一個 1-factor。現在, 扣掉一個 1-factor 剩下的是 $2-$ 正則圖; 因爲 P 中無 C_3 或 C_4 , 所以唯一的可能是剩下兩個 C_5 (P 不爲哈米爾頓圖?); 由命題 5.2 還需要 3 色才夠, 所以 $\mathcal{X}'(P) = 3$ 不可能。 ■

命題 5.8. (過重圖 (Overfull))

一個圖 G 若滿足 $|E(G)| > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$, 則稱 G 爲過重圖。

命題 5.9. 令 G 爲一個過重圖, 則 $\mathcal{X}'(G) > \Delta(G)$ 。

命題 5.10. 令 G 爲具有奇數點的正則圖則 $\mathcal{X}'(G) > \Delta(G)$ 。

證明. 奇數點的正則圖必爲過重圖, 所以由命題 5.9, 命題得證。 ■

命題 5.11. 過重圖的點數必爲奇數。

證明. 由定義即可看出。 ■

命題 5.12. 如果 G 是 $k-$ 邊可著色, 則必定存在一個 $k-$ 邊著色 π , 使得對於任意的 $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $||\pi^{-1}(i)| - |\pi^{-1}(j)|| \leq 1$ 。

證明. 如果存在有兩個顏色 i , j , 它們出現的邊數相差不小於 2, 令這兩個邊集合分別爲 E_i 與 E_j 而且 $|E_i| > |E_j| + 1$ 。現在, 令 $E_i \cup E_j$ 所導出的子圖爲 H_{ij} 。在 H_{ij} 中可能的部份圖爲偶圈, 偶數邊的路徑以及奇數邊的路徑; 由於 $|E_i|$ 比 $|E_j|$ 大, 所以奇數邊的路徑必然存在, 而且路徑的首尾兩邊

均塗上顏色 i 。現在, 只要在這條路徑上把 i 與 j 兩個顏色互換, 即可縮小 $|E_i|$ 與 $|E_j|$ 的差距。按同樣的步驟繼續下去即可得證。 ■

如果一個邊著色可以滿足上述定理的條件, 我們也稱它是一個均衡邊著色 (Equalized edge-coloring), 在應用上可以用來安排工作 (Scheduling), 讓每次要做的事 (獨立) 平均進行。同時, 有不少組合數學的結果利用這個概念加以證明。

在邊著色方面 Vizing 的定理可以算是最有貢獻的成果。

定理 5.13. (Vizing定理)

令 G 爲一般圖 (Simple Graph)。則 $\mathcal{X}'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

證明. 首先, 我們利用 $\Delta(G)+1$ 個顏色 $a_0, a_1, a_2, ..., a_\Delta$ 來塗 G 中的邊 (得到的著色爲 π), 在合乎正規邊著色的情況下能塗越多邊越好。如果每一邊都已經上色, 則定理得證。現在, 假設 uv 這個邊尚未著色, 由於 v 的度數最多爲 $\Delta(G)$, 所以在 v 周圍的邊最多塗了 $\Delta(G)$ 個顏色, 所以, 假設 v 點四週少掉了顏色 a_1 ; 令在 v 點四週少掉的顏色所成的集合爲 $M(v)$, 則 $a_1 \in M(v)$ 。接下來考慮 $M(u)$; 如果 $a_1 \in M(u)$, 則顯然 uv 可以塗上 a_1 這個顏色, 所以 $a_1 \notin M(u)$, 令 $a_0 \in M(u)$, 而 $\pi(uv_1) = a_1$ 。再看 $M(v_1)$, 令 $a_2 \in M(v_1)$, 則 $a_2 \notin M(u)$, 否則將 uv_1 的顏色改成 a_2 , 於是 $a_1 \in M(u)$, uv 即可塗上 a_1 。於是, 我們得到一個關係式, 即當 $a_{i+1} \in M(v_i)$, 則 $a_{i+1} \notin M(u)$, $i \geq 1$ 。

由於顏色數爲 $\Delta(G)+1$, 所以上述關係式的 a_{i+1} 遲早會出現相同的顏色。令 l 爲最小的正整數使得 $a_{l+1} \in \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, 令 $a_{l+1} = a_k$, $1 \leq k \leq l$ 。這個時候, 考慮 a_0 出現的情形:

(a) $a_0 \in M(v_l)$, 將 a_l 用 a_0 取代, 然後往回推, 換色, 最後可以將 uv 塗上 a_1 。

(b) $a_0 \notin M(v_l)$, 由於 $a_{l+1} = a_k$, 所以 $a_k \in M(v_l)$ 。現在考慮由 a_0 , a_k 兩色從 a_l 開始走的交替路徑 P , 顯然是 a_0 的邊, 再接 a_k 的邊, ...。我們分三種情形討論:

  (i) $P = v_l - v_k$, 這個時候因爲 $\pi(uv_k) = a_k$, 所以把 a_0 與 a_k 換色, 使得 $\pi^*(uv_k) = a_0$, 接下去再利用回推的方式著色即可。

  (ii) $P = v_i - v_{k-1}$, 這個時候因爲 $a_k \in M(v_{k-1})$, 所以 P 的最後一邊塗上 a_0 這個顏色, 於是將 a_0 與 a_{k-1} 換, 再回推即可。

(iii) $P = v_l - v_i$, $i \neq k-1, k$, 這個時候將 a_l 與 a_0 交換, 再往回推著色即可。(?) ■

(註) 上述換色的概念一般以“Fan Sequence”來稱呼它。

有了 Vizing 定理的保證, 一個圖的邊著色數只有 $\Delta(G)$ 與 $\Delta(G)+1$ 兩種。

定義 5.14. (Class 1 and Class 2)

邊著色數爲 $\Delta(G)$ 的圖 G 稱爲是第一類圖 (Class 1), 而不是 $\Delta(G)$ 的圖爲第二類圖。

所以, 前面提到的圖, 只要邊著色數比 $\Delta(G)$ 大就一定是第二類圖。

接下我們再分析一下第一類圖的特性。

當一個正則圖是屬於第一類圖的時候, 每一個不同顏色所出現的邊就會形成一個完全配對, 或是說 1– 因子 (1-factor), 所以這個圖就有了 1– 分解 (1-factorization)。以下的猜測截至目前爲止尚未被證明出來, 如果是對的, 在組合設計上將會有很重要的貢獻。

猜測. 對於所有的 $r-$ 正則圖 G , 如果 $|V(G)| = 2m$, 而且 $r \geq m$, 則 G 是第一類圖。

前面所提到的圖都是一般圖, 如果我們考慮的是重邊圖, 則情況會有些改變。

定理 5.15. (重邊圖的 Vizing 定理)

令 $\mu(G)$ 代表在 G 中具有重邊的最多邊數 (multiplicity)。則 $\mathcal{X}'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ 。

證明. 省略。

猜測. (6 Perfect Matchings) 令 G 爲沒有橋的連通 3– 正則圖, 則 $\mathcal{X}'(2G) = 6$, 這裡的 $2G$ 代表 G 中有邊的地方都是二重邊。

(註) 沒有橋的連通 3– 正則圖自然沒有切點。

(註) 具有切點的正則圖都是第二類圖 (?)。

邊著色的應用:

和點著色一樣, 邊著色也有很多應用, 在此舉出幾個例子說明。

1. 電路板

在電路板上有很多電子組件 (Devices) 各具有它的功能, 而這些組件之間就會用線路把它們相連在一起, 顯然由一個組件向外連的線路都要用不同的顏色, 於是邊著色數代表著所使用不同顏色電線的個數。

2. 排課問題 (教師及課程)

令教師用點 $t_1, t_2, \ldots, t_m$ 代表, 而教學的課程用 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 來代表; 現在, 如果教師 t_i 要教 $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_k}$, 則將它們用邊相連, 於是, 我們得到一重邊的二分圖 (某一課程一位老師可能要教很多個班), 而它的邊著色數代表一天至少要有多個時段, 否則一位老師無法教完他的指定課程。

3. 電話網路

爲了節省, 電話網路都是利用交換機來分配要求通話的電話, 因此適當的圖模式可以來解決分配的問題, 而邊著色也反應出較少的交換機數以節省成本; 至於如何操作請自行想像。

6. 全著色 (Total Coloring)

在這一節中我們討論如何同時在點及邊上著色。

定義 6.1. G 的全著色是一個由 $V(G)\bigcup E(G)$ 映至 N 的函數 ψ , 它滿足
(i) 如果 $u \sim v$, 則 $\psi(u) \neq \psi(v)$,
(ii) 如果 $e \bigcap f \neq \phi$, 則 $\psi(e) \neq \psi(f)$, 及
(iii) 如果 $u \in e$, 則 $\psi(u) \neq \psi(e)$ 。
簡單的說, 如果 ψ 是一個圖 G 的全著色, 則 $\psi|_{V(G)}$ 爲 G 的一個點著色, $\psi|_{E(G)}$ 爲 G 的一個邊著色, 同時相鄰的點與邊也塗上不同的顏色。

定義 6.2. 若是 ψ 爲 G 的一個全著色, 當 $|\psi(V(G)\bigcup E(G))| = k$ 時, ψ 也稱是 G 的一個 k -全著色; 於是, G 的全著色數 $\chi''(G)$ 就定義爲所有 k -全著色的最小 k 值。

由定義, 下列的結果都很容易求出。

引理 6.3. $\triangle(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$ 。

命題 6.4. $\chi''(C_{2m}) = 4$, $\chi''(C_{2m+1}) = 3$ 。

命題 6.5. $\chi''(K_{2m}) = \chi''(K_{2m+1}) = 2m + 1$ 。

命題 6.6. $\chi''(K_{n,n}) = n + 2$ 。

證明. 首先 $\chi''(K_{n,n}) \leq n + 2$, 因爲 $\chi''(G) \leq \chi(G) + \chi'(G)$ 。再看另一邊, 如果 $\chi''(K_{n,n}) = n + 1$, 則每個顏色平均出現 $\frac{(n^2+2n)}{n+1}$ 次, 所以, 由鴿籠原理 至少有一個顏色出現至少 $n+1$ 次; 令此顏色爲 c 。由於 $K_{n,n}$ 的最大配對有 n 邊, 所以一定會 有某些點上 c 這個顏色, 但是塗上 c 色的點不能相鄰, 所以它們出現在 $K_{n,n}$ 的同一邊, 這表示 c 最多只會出現在 n 個地方 (點或邊), 與觀察的結果 矛盾, 所以 $\chi''(K_{n,n}) > n + 1$ 。 ■

由上面的結果, 不難想像一個圖 G 的全著色數可能不會比 $\Delta(G)$ 大很多, 所以在三十多年前 Vizing 和 Berhzad 就分別猜測 $\Delta(G) + 2$ 可能是最好的上界。

全著色猜測 (Total Coloring Conjecture) $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ 。

這個猜測僅管在很多特殊圖都成立, 一般的證明仍然在未定之天。以下是一個用來證明這件事的個技巧。

首先, 在 G 中找一個獨立集 T , 然後建構一個新圖 G^* 。其中 $V(G^*) = V(G)\bigcup\{v^*\}$, $E(G^*) = (E(G)\bigcup\{E(G)\bigcup\{v^*v|v \in V(G)\backslash T\})\backslash M$, M 是 $< V(G)\backslash T >_G$ 的一個配對。現在, 只要知道 $\chi'(G^*)$ 就可以知道 $\chi''(G)$ 的一個 上界。

引理 6.7. $\chi''(G) \leq \chi'(G^*) + 1$

證明. 利用 G^* 的邊著色, 把 $V(G)\backslash T$ 中的點 v 塗上 v^*v 的顏色, 同時保留 $E(G)$ 中邊的顏色 再用一個新的顏色來塗 T 中的所以點以及 M 中的邊, 就可以得到 G 的一個全著色。 ∎

推論 6.8. 若是 $\chi'(G^*) \leq \Delta(G) + 1$, 則 G 滿足 TCC 。

由引理 6.7, 我們不難看出, 只要 $\Delta(G^*)$ 維持和 $\Delta(G)$ 一樣, G 就會滿足 TCC 。利用這個觀 念, 我們可以證明完全多分圖也滿足 TCC 。(?)

爲了有效地判斷一個圖的全著色數, 以下是一個分類的概念。

定義 6.9. 當 $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$ 時我們稱 G 爲第一型圖, 不然的話就是第二型圖。

例. C_{2m+1} , K_{2m+1} 爲第一型圖, $K_{n,n}$ 爲第二型圖。

引理 6.10. 令 G 爲第一型圖且 $x_i = |\psi^{-1}(i)\bigcap V(G)| = |\psi|^{-1}_{V(G)}(i)|$, $i = 1,\ 2,\ 3, ...,\ \Delta(G) + 1$ 。則 $|\{i|x_i \equiv |V(G)| \pmod 2\ \}| \leq def(G)$ 。$(*)$

證明. 由於 G 是第一型圖, 對於度數爲 $\Delta(G)$ 的點 v , $\{\psi(v)\}\bigcup\{\psi(uv)|u \in N(v)\}$ 爲 $\{1,\ 2, ...,\ \Delta(G) + 1\}$, 也就是說, 只要具有最大度, 該點的附近必然出現每一個顏色; 現在, 假設 i 這一個顏色出現在 $T_i = \psi|^{-1}_{V(G)}(i)$ 以及 $M_i = \psi|^{-1}_{E(G)}(i)$, 則當 $|T_i| \equiv |V(G)| \pmod 2$ 時, 必定會有至少一點, 它的附近沒有 i 這個顏色, 這表示至少有一點它的度 數比 $\Delta(G)$ 小" 1 ", 所以引理得證。 ∎

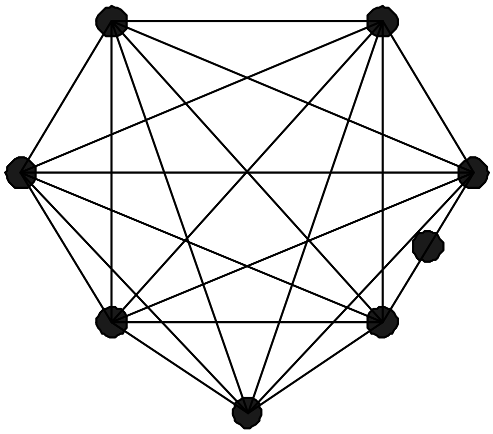
定義 6.11. 如果在 G 中存在一個點著色 ψ , 使得 $|\{i||\varphi^{-1}(i)| \equiv |V(G)| \pmod 2\ \}|$ 不大於 $def(G)$, 則我們稱 G 爲適合圖 (Conformable)。

引理 6.12. 第一型圖必定是適合圖。

然而, 是適合圖並不一定是第一型圖。

例. $K_{2m,2m}$ 爲適合圖, 但是它不是第一型圖。

例. Chen and Fu 圖是適合圖, 但是它不是第一型圖。(把 K_{2n-1} 的一邊分成兩邊。)



Chen and Fu 圖 : $n = 4$

引理 6.12 最重要的貢獻是它提供一個判斷第二型圖的好方法, 也就是說, 只要知道一個圖它不是適合圖 則它就必定是第二型圖。至於, 如何判斷是第一型圖就有待努力了。以下的猜測是經過修飾的版本, 原來的版本, 原來的版本在 Chen & Fu 圖發現之後就發現它是錯了。

適合性猜測 (Conformability Conjecture)

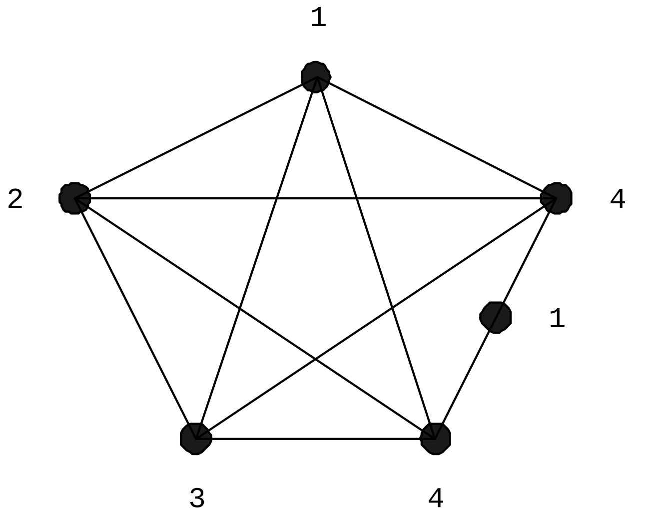
令 G 爲滿足 $\Delta(G) \geq \frac{1}{2}(|V(G)+1|)$ 的圖。則 G 是第二型圖的充要條件爲 (i) G 不 含任何子圖 H , 它滿足 $\Delta(H) = \Delta(G)$ 而且 H 爲不適合圖, 或 (ii) $\Delta(G)$ 是偶數而且 G 不含 Chen & Fu 圖爲它的子圖。

爲了研究第一型圖的刻劃, 除了適合性之外,Hamilton,Hilton 和 Hind(3H) 他們提供了另一個重要的鄰 域概念。現在, 假設 G 是第一型圖, ψ 是一個 G 的全著色, 它用了 $\Delta(G)+1$ 個顏色; 令 $C_i = \psi|^{-1}_{V(G)}(i)$, $i = 1,\ 2,\ 3, ...,\ \Delta(G)+1$ 。對於 $i = 1,\ 2,\ 3, ...,\ \Delta(G)+1$ 再令 $\xi_i = |\{u|N(u) \subseteq C_i \neq \phi\}|$,

$$\xi_i^+ = \begin{cases} \xi_i & , \xi + |C_i| \equiv |V(G)|(\text{mod}2) \\ \xi_i + 1 & , \xi + |C_i| \not\equiv |V(G)|(\text{mod}2) \end{cases}$$

由於鄰域的所有點都塗上 i 這個顏色, 表示"本身就不會是塗 i ", 再加上當 $\xi_i + |c_i| \equiv |V(G)| \pmod 2$ 時, 就必定會產生具有 deficeincy 的點, 所以 $\mho(G) \geq \sum_{i=1}^{\Delta(G)+1} \xi_i^+$ 。———— (**)

和 (*) 比較起來, (**) 多加了一些考量, 對於四周都塗上同色的點也拿出來算。現在就以 Chen & Fu 圖爲例來加以說明:



如果上圖是第一型圖, 則 y 與 z 必需同色" 1 ", u, v, x 分別塗上 2, 3, 4, w 則任選一色 2 ; 現在 $\xi_1^+ \xi_1 + 1 = 2$, $\xi_2^+ = 0$, $\xi_3^+ = 0 + 1 = 1$, $\xi_4^+ = 0 + 1 = 1$, $\xi_5^+ = 0$ 。所以 $\sum_{i=1}^{5} \xi_i^+ = 4 > \mho(G)$ 。因此, G 不是第一型圖。

(**) 看起來非常好, 是否能達到刻劃第一型圖的目的就只好靠某個聰明人來回答了。

問題 找一個圖, 它滿足 (**) , 但是它是第二型圖。

歷經多年的努力, 全著色的研究有了不少的成果, 在 TCC 的證明方面, 雖然截至目前爲止還沒有得到完全的答案, 但是已經有相當多的圖 G 被證明 $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$, 或則是得到比較大一點的上界, 以下的結果證明均省略。

定理 6.13. [Hind , 1986] $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2\lceil \Delta(G)^{\frac{1}{2}} \rceil + 1$ 。

定理 6.14. [Chetwynd,Hilton 及 Zhao Cheng,1989] 如果 $\delta(G) \geq \frac{5}{6}(|V(G) + 1|)$, 則 $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ 。

定理 6.15. [Chetwynd 及 Häggkvist ,McDiarmid 及 Reed , 1990] 如果 $t! > |V(G)|$, 則 $\chi''(G) \le \Delta(G) + t + 1$ 。

定理 6.16. [Hind , 1990] $\chi''(G) \le \Delta(G) + 2\lceil \frac{|V(G)|}{\Delta(G)} \rceil + 1$ 。

這一個果非常漂亮, 尤其是當 $\Delta(G)$ 相當大的時候, 譬如 $\Delta(G) \ge \frac{|V(G)|}{2}$, 則 $\chi''(G) \le \Delta(G) + 5$ 。不過, 在 $\Delta(G)$ 與 $|V(G)|$ 相差很大就不太理想了。

定理 6.17. [Hilton 及 Hind , 1989] 若是 $\Delta(G) \ge \frac{3}{4}|V(G)|$, 則 $\chi''(G) \le \Delta(G)+2$ 。

以上的結果比起早期研究當 $\Delta(G) \longrightarrow |V(G)|$ 的情況都要好很多, 所以那些結果在此不再敍 述。至於 $\Delta(G)$ 小的情況, 也有一些重要的結果。

定理 6.18. [Rosenfeld Vijyadita , Kostochka ; 1971 , 1977] 如果 $\Delta(G) \le 4$, 則 $\chi''(G) \le \Delta(G) + 2$ 。

當 G 爲平面圖時, 則結果更好!

定理 6.19. [Bordin , 1989] 令 G 爲平面圖, 則

1. $\chi''(G) \le \Delta(G) + 2$, $\Delta(G) \ne 6,\ 7,\ 8$,
2. $\chi''(G) \le \Delta(G) + 3$, $\Delta(G) \in \{6,\ 7,\ 8\}$, 及
3. $\chi''(G) \le \Delta(G) + 1$, $\Delta(G) \ge 14$ 。

值得一提的是, 如果我們利用顏色先把點塗好顏色, 然後再來塗邊的顏色看起來似乎是不錯的概念, 然而, 情況並未改善, 實際上可能要動用更多的顏色。例如 $K_{2,3}$ 。$\chi''(K_{2,3}) = 4$, 但是若把點先用 1 , 2 兩色塗好, 再塗邊, 則需要五色哩!

接下來, 我們看看全著色"Type"刻劃的一些結果: 上一節已經提到的不再重複。

首先, 我們探討完全多分圖 (Complete Multipartite Graph):

$K_{n_1,\ n_2,\dots,\ n_k}$

定理 6.20. $\chi''(K_{m,n})$ 爲第一型圖若且唯若 $m \ne n$ 。

證明. ($\Leftarrow$) 令 $m < n$ 及 $K_{m,n} = (A, B)$, 則 $\Delta(K_{m,n}) = n$ 。因爲 $\chi'(K_{m,n}) = n$, 先將 $K_{m,n}$ 的邊用 n 個顏色塗好, 接下來塗點。用第 $n+1$ 色塗在 A 上; 然後, 對於 B 中的點, 塗上 n 色中 不出現在該點 (邊) 的任一個顏色, 即可得到 $K_{m,n}$ 的一個 $(n+1)$ -全著色。
($\Rightarrow$) 假設 $K_{n,n} = (A, B)$ 爲第一型圖, 亦即用 $n+1$ 個顏色即可完成著色。由於 $K_{n,n}$ 中的每一個點皆有相 同的度數, 所以每一個顏色都會出現在它的附近 (點上或邊上)。接著來看顏色出現在點的情況, 令 i 是 出現在 A 中的一種顏色; 則 i 不會出現在 B, 所以 B 中的每一點必定碰到一個塗上 i 的邊, 但是不用到塗 i 的點再也找不到具有 n 個邊的配對, 所以是不可能, 因此定理得證。

上述的概念, 可以用來判斷一個二分圖是否爲第一型圖的重要工具。

定義 6.21. (雙適合性, Biconformability) 令 $G = (A, B)$ 且 $|A| = |B|$ 。如果 G 有一個點著色 $\varphi : V(G) \longrightarrow \{1,\ 2, ...,\ \Delta(G)+1\}$ 滿足下列條件, 則 G 具有雙適合性

(i) $def(G) \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{\Delta(G)+1} |a_i - b_i|$, $a_i = |A_i| = |\varphi^{-1}(i) \cap A|$, $b_i = |B_i| = |\varphi^{-1}(i) \cap B|$ 。

(ii) $|V_{<\Delta}(A \setminus A_j)| \geq b_j - a_j$, $|V_{<\Delta}(B \setminus B_j)| \geq a_j - b_j$, $j \in \{1,\ 2, ...,\ \Delta(G)+1\}$, $V_{<\Delta}(S)$ 代表在 S 中度數不爲 $\Delta(G)$ 的點數。

這個定義說明了兩件事; 要具有雙適合性, 最好 (i) 顏色 i 出現在 A 與 B 的點數越靠近越好; 另外 (ii) 如 j 出現的點數 不夠平均; 當出現在 B 中較多時,A 中除了塗上 j 的點之外, 一定要有足夠多的點, 它們的度數不是 $\Delta(G)$ 。

引理 6.22. 令 $G = (A, B)$, 而且 $|A| = |B|$, 則當 G 爲第一型圖時, G 具有雙適合性; 反過來, 不具有雙適合性的均 衡二分圖必爲第二型圖。

證明. 前面的說明可以得到這個結論。

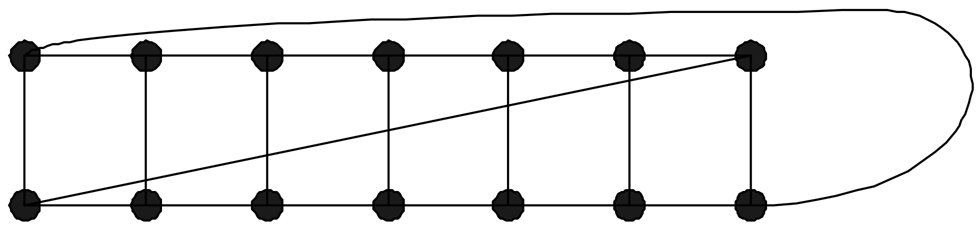
定理 6.23. [Hilton , 1991] 令 $J \leq K_{n,m}$, $e(J) = |E(J)|$ 及 $m(J)$ 爲圖 J 的最大配對數。則 $\chi''(K_{n,n} \setminus E(J)) = n+2$ 若且唯若 $e(J) + m(J) \leq n-1$ 。

在上述論文中同時提出以下的雙適合性猜測:

雙適合性猜測 (Biconformable Conjecture)

一個滿足 $\Delta(G) \geq \frac{3}{14}(|V(G)|+1)$ 的二分圖 G 是第二型圖的充要條件爲 G 包含一個導 出子圖 H 它滿足 $\Delta(H)=\Delta(G)$ 同時 H 不具有雙適合性。

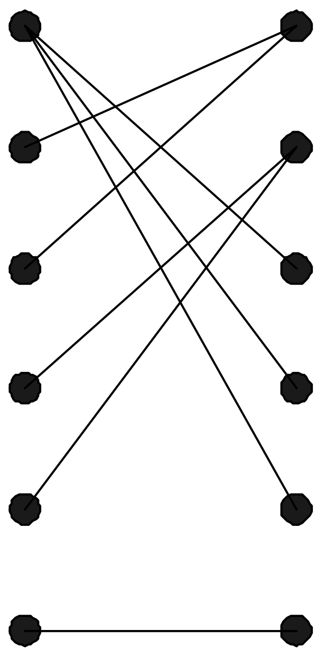
這個猜測中的 $\frac{3}{14}$, 是因爲下圖具有雙適合性, 但是它是第二型圖。



M_{14}

不過, 沒多久, 這個猜測又被證明是錯了。鄭俊淦等人找到了一族圖, 它們都是反例, 下圖是其中的一個特例, 因爲 G 的邊較多, 用 $\overline{G}$ 來表示這個圖。

$\overline{G}$



(3;2,2;1)- D

由於描述這個結果需要較長的篇幅, 在此省略, 讀者可以參考"A study of total chromatic number of equibipartite graphs" , DM 184(1998) , 49-60 , 作者有陳伯亮等四人。

最後, 我們來看看完全多分圖的分類。首先, 當每個部分都具有相同的點數時, 我們稱之爲均勻完全多分 圖 (Balanced Complete Multipartite Grpah), 以 $K_{t(n)}$ 代表它有 t 部分, 每部分都有 n 個點。

定理 6.24. [Bermond , 1974; Chen , Fu 及 Wang 1991] $K_{t(n)}$ 爲第二型圖的充要條件爲 $t = 2$ 或是 t 爲偶數而且 n 爲奇數。

如果考慮一般的完全多分圖, 則當點數爲奇數時就不難證明。

定理 6.25. [Chew 及 Yap , 1990] 當 $G = K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}$ 及 $|V(G)|$ 爲奇數時, G 爲第一型圖。

很奇怪的是當 $|V(G)|$ 爲偶數時, 要刻劃它就沒那麼容易了。

當然, 主要的理由是它可能是第二型圖 (定理 7.12)。以下是我們的猜測:

猜測 **(Chen** & **Fu)**

一個完全多分圖 ($t \geq 3$) G 是第一型圖的充要條件爲 G 具有適合性。

7. 列表著色 (List Coloring)

在全著色的研究中, 有人建議先塗好點的顏色, 然後對於每個邊, 利用不出現在兩端點的顏色來塗邊; 或則 先塗上邊的顏色, 再塗點。僅管這樣的構想, 一般而言, 不會有太大的幫助, 然而一種預先在點 (或邊) 上指 定可以使用的顏色, 然後再著色的概念就形成了; 今天, 它也成爲著色理論中重要的課題。我們先討論 點著色問題。

定義 7.1. 一個由 $V(G)$ 對應到 2^N 的函數 L 稱爲是 G 的列表函數。對於 G 中任一點 x , $L(x)$ 也稱爲是點 x 的表列。

定義 7.2. (列表著色, 選擇函數;List Coloring , Choice Function) 對應於 G 的一個列表函數 L , $f_L : V(G) \longrightarrow N$ 稱爲是 G 的一個列表著色 (或選擇函數) 如果下列兩個條件滿足:
(a) $\forall x \in V(G)$, $f_L \in L(x)$ 。
(b) f_L 爲 G 的一個點著色。

定義 7.3. (k -列表可著色) 如果對於任何滿足 $|L(x)| = k(x \in V(G))$ 的列表函數 L , 都存在一個 G 的列表著色, 則 G 稱爲是 k -列表可 著色, 或 k -列表可選擇。

使得 G 可以是 k -列表可著色的最小 k 稱爲是 G 的列表著色數, 以 $\hat{\chi}(G)$ 表示。

由定義, 不難明以下和 $\chi(G)$ 相似的性質。

引理 7.4. $\hat{\chi}(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

引理 7.5. 若是 G 爲 k -退化圖 (k -degenerate), 則 $\hat{\chi}(G) \leq k + 1$ 。

不過, $\hat{\chi}(G) - \Delta(G)$ 可以是一個非常大的量。

定理 7.6. [Erdös , Rubin 和 Taylor , 1979]
令 $m = \binom{2k-1}{k}$, 則 $\hat{\chi}(K_{m,m}) > k$ 。

證明. 令 $X = \{1,\ 2, ...,\ 2k-1\}$, $A = B = \binom{X}{k}$ 以及 $K_{m,m} = (A, B)$ 。現在, 假設 $\hat{\chi}(K_{m,m}) \leq k$ 同時令 S 是用來列表著色的顏色所形成 的集合; 由於 $K_{m,m}$ 是完全二分圖, 所以 A 中的點最多只會用到 $k-1$ 個顏色, 令這些顏色所形成的集合 爲 $S' \subseteq S$, 則必存在一集合 $T \in A$, 而且 $S' \bigcap T = \phi$, 如此一來 T 就沒有著色, 這與 假設矛盾。 ■

要決定一個圖的列表著色並不容易, 雖然 $\chi(G) \leq \chi(\hat{G})$ 是很明顯的結果, 例如, 判斷何時 $\chi(\hat{K_{m,m}}) = 3$ 就得大費周章哩!以下的定理是由四篇重要論文所堆積出來的成果。

定理 7.7. 令 $m \leq n$, 則 $\hat{\chi}(K_{m,m}) = 3$ 若且唯若 $m \leq 2$, $m = 3$ 且 $n \leq 26$, $m = 4$ 且 $n \leq 20$, $m = 5$ 且 $n \leq 12$ 或是 $m = 6$ 且 $n \leq 10$ 。

上述的 4 部分結果作者分別爲 Erd$\ddot{o}$ s-Rubin-Taylor[1979],Mahadev-Roberts-Santhanakrishnan[1991],
Shende-Tesman[1994]和 O'Donnell[1996]。

另外一個令人興奮的結果是平面圖的列表著色數。

定理 7.8. [Thomassen , 1994] 對於任何平面圖 G , $\hat{\chi}(G) \leq 5$ 。

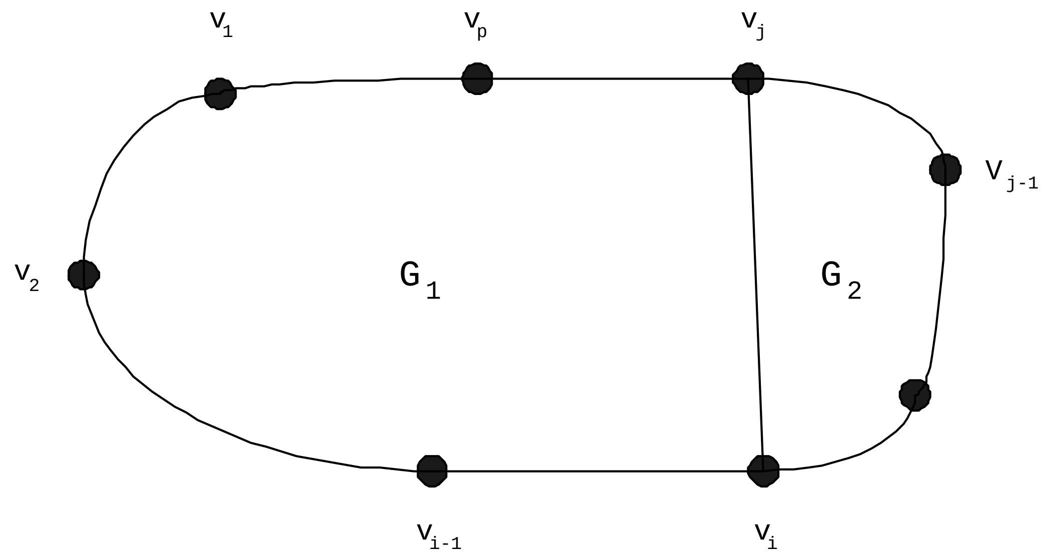
證明.

由於增加邊 (維持平面圖) 不會減少著色數, 所以我們證明比較大的平面圖對的話, 則它的子圖也一定成立。於是, 考慮一個平面圖, 它除了最外圍是一個圈之外, 其它內部的區域都是由三角形所圍成。以下我們證明 在外圍的圈上有兩個鄰點它們的列表均爲元素的集合 (相異), 其它點的列表長度爲 3; 而內部點的列表長度 是 5 的情況下, G 可以找到一個列表著色。

用歸納法證明 (點數 p)。顯然, 當 p=3 時可以找到適當的點著色, 現在假設 $< p$ 時都成立。令外圍的圈是 C , $V(C) = \{v_1,\ v_2, ...,\ v_t\}$, 而且 $|L(v_1)| = |L(v_p)| = 1$, 其它爲 3。

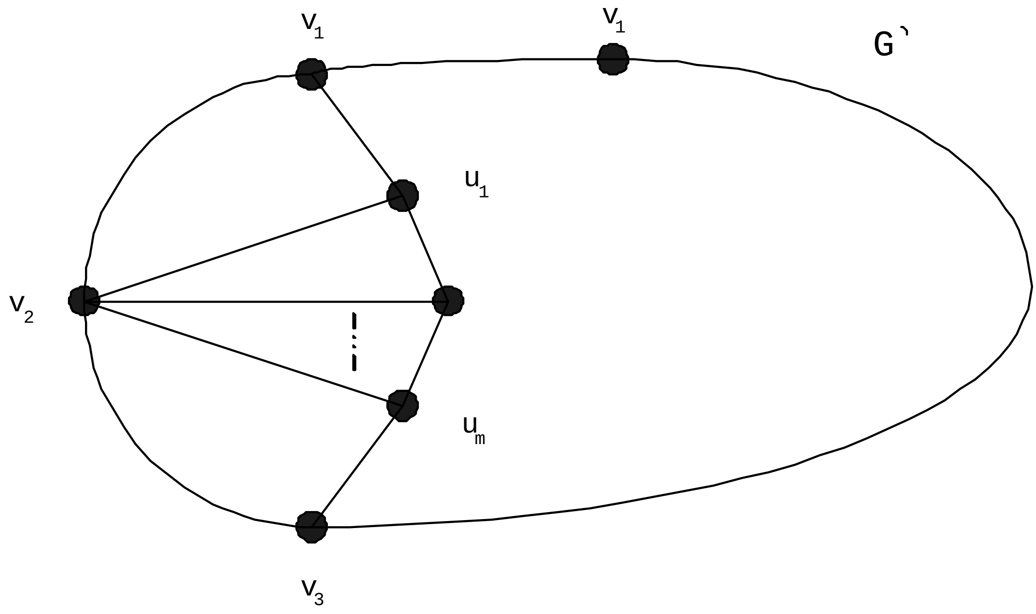
(i) C 有弦 $x_i x_j$, $1 \leq i \leq j \leq p$ 。

現在將原圖分成兩部分, 如圖所示; 則由歸納假設 $\hat{\chi}(G_1) \leq 5$; 然後, 在"選定 x_i 與 x_j 的顏色"之後, G_2 的部分由歸納法也得到 $\hat{\chi}(G_2) \leq 5$, 所以 $\hat{\chi}(G) \leq 5$ 。



(ii) C 沒有弦。

令 $N(v_2) = \{v_1,\ u_1,\ u_2, ...,\ u_m,\ v_3\}$,如圖所示。由於 C 沒有弦, $u_1,\ u_2, ...,\ u_m$ 皆在 C 的內部。現在, 考慮 $G' = G - v_2$, 則 $C' = v_1 - u_1 - ... - u_m - v_3 - v4 - ... - v_p - v_1$ 為 G' 的外圍; 令 $L(v_1) = \{c\}$, $\{x,\ y\} \subseteq L(v_2) \setminus L(v_1)$, $L_{G'}(u_i) = L_G(u_i) \setminus \{x,\ y\}$, $i = 1,\ ,2, ...,\ m$ 。於是由歸納法 $\hat{\chi}(G') \leq 5$ 。最後, 令 v_2 的顏色為 $\{x,\ y\}$ 中的一色 但是不出現在 v_3 即可得到 $\hat{\chi}(G) \leq 5$ 。■



列表著色也可以考慮邊上的著色, 它的成果也想當好, 最不可思議的是, 不像點著色 $\hat{\chi}(g)$ 與 $\chi(G)$ 可能相差很大, 在邊著色方面這兩個量極可能相等。

定義 7.9. (邊列表著色, Edge-List-Coloring) $\hat{\chi}'(G) = \hat{\chi}(L(G))$ 。

由 $L(G)$ 的性質, 不難看出 $\hat{\chi}'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$, 或是 $\hat{\chi}'(G) \leq 2\chi'(G)$, 但是, 實際上 Gupta 等人猜測: $\hat{\chi}'(G) = \chi'(G)$ 。

邊列表著色猜測 (Edge-List-Coloring-Conjecture) 對於所有的圖 G , $\hat{\chi}'(G) = \chi'(G)$ 。

以下是相關結果。

定理 7.10. [Häggkivst 及 Janssen , 1996] 當 n 是奇數時, $\hat{\chi}'(K_n) = n$, 亦即 $\hat{\chi}'(K_n) = \chi'(K_n)$ 。當 n 是偶數時, 目前仍是未知。

定理 7.11. (Dinitz Conjecture) $\hat{\chi}'(K_{n,n}) = \chi'(K_{n,n})$

定理 7.12. (Galvin , 1995) 對於所有的二分圖 G , $\hat{\chi}'(G) = \chi'(G) = \Delta(G)$ 。

這是一個非常漂亮的結果, 讀者可以參考 JCK(B)63 , 1995 , 153-158 。定理 7.11 顯然是 7. 12 個特例, 它的證明比較容易, 由於要用到比較多的預備知識, 在此省略; 證明參考 D.West 的書, 387-389。