第三章　連通性

1.　切點與切集 (Cut Vertices and Cut Set)

一般的圖在去掉一些點之後 , 就可能成爲不連通的圖 , 我們當然想知道究竟是去掉幾點才能成爲不連通的圖 ?

定義 1.1. 在一個圖 G 中 , 如果 G 的部份數 $c(G) < c(G-v)$, 則 v 稱爲是 G 的一個切點 (Cut Vertex) 。

所以, 在一個連通圖中, 如果拿掉一點 v 會使得這個圖變成不連通 , 則這個點必然是切點 ; 反過來 , 有切點的連通圖並非拿掉任意點都可以使得這個圖成爲不連通 。以下的性質說明了切點所在的位置 。

定理 1.2. v 是連通圖 G 的切點之充要條件是存在兩個與 v 不同的點 u 及 w , 同時滿足所有由 u 到 w 的路徑皆會通過 v 點 。

證明. 由定義可以直接推得。 ■

從另一角度來看, 並非所有點都會是切點。

定理 1.3. 一個兩點以上的圖 , 除了空圖 (沒有邊) 之外都至少含有兩點, 它們都不是切點。

證明. 假設最多只有一個點不是切點 。令 u 、v 爲 G中的兩點滿足 $d(u,v) = D(G)$ (直徑) , 所以 , 至少有一點是切點 。假設 v 爲切點 , 由定義 $G-v$ 爲不連通圖 , 令 w 與 v 在 $G-v$ 不同的部份中 , 於是 , 所有的 $u-w$ 路徑必通過 v , 這表示 $d(u,w) > d(u,v)$, 與假設 $d(u,v)$ 爲直徑矛盾 , 定理得證 。 ■

現在 , 如果去掉一個點不會使得一個圖成爲不連通圖 , 則此圖的結構就會更緊密 。例如 , 一個圈就是這樣的圖 , 以下是一個更一般的定義 。定義中 $G-S$ 代表逐一去掉 S 中的點所得到的圖 。

定義 1.4. (點連通數 , Connectivity)

一個圖 G 的點連通數 $\kappa(G) = min$ { $|S|$ $|S \subseteq V(G)$ 且 $G - S$ 爲不連通圖或是剩下一點 } 。

所以 , 當 G 本身不連通時 , $\kappa(G) = 0$; 如果 G 中含有切點而本身又是連通圖 , 則 $\kappa(G) = 1$ 。例如 , 樹圖或是 K_2 ; 當然任意圈的點連通數都是 2 。爲了方便起見, 一般把滿足 $\kappa(G) \geq n \geq 1$ 的圖 G , 稱爲 $n-$ 連通圖 , 所以所謂的 $1-$ 連通圖就是指一般的連通圖 。同時 , 在一個 $n-$ 連通圖中 , " 至少 " 要拿走 n 個點才可能得到一個不連通的子圖 。以下的性質 , 是利用度數列來刻劃一個 $n-$ 連通圖 。這個結果最早由 Bondy 證明 , 寫出下述的形式是來自 Boesch 。

定理 1.5. 令 G 爲具有 p 個點的圖 , 它的度數列爲 $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_p$, 同時 $1 \leq n \leq p - 1$, 如果對於所有的 $1 \leq k \leq \lfloor (p - n + 1)/2 \rfloor$, $d_k \leq k + n - 2 \Rightarrow d_{p-n+1} \geq p - k$, 則 G 爲一個 $n-$ 連通圖 。

證明. 假設 $\kappa(G) < n$, 所以在 $V(G)$ 中存在一個子集合 S , $|S| \leq n - 1$, 使得 $G - S$ 爲一個不連通圖 ; 同時令 H 爲點數最少的部份 (在 $G - S$ 中) , $|V(H)| = k$ 。因此 , $k \leq \lfloor \frac{p-n+1}{2} \rfloor$, 對於 H 中的點 x , $deg_G(x) \leq (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2$, 因此 $d_k \leq k + n - 2$, 由假設 $d_{p-n+1} \geq p - k$, 但是 , $V(G) \backslash (V(H) \cup S)$ 中的點度數皆小於 $p - k$ (參考圖 1) , 因此 , 只有 S 中的點有可能 $\geq p - k$, 顯然滿足這條件的點有 n 個 , 與假設矛盾 , 定理得證。 ■

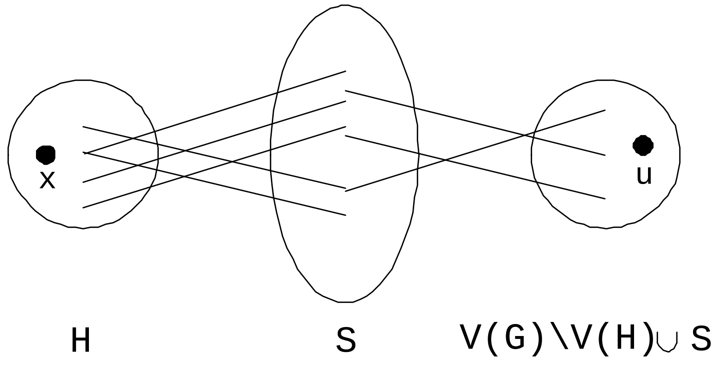


圖 1

從圖 1 , 我們直觀地想到要將 x 與 u 隔斷 , 至少要在 n 個地方攔截它們之間的連通關係 , 也就是說 u 與 x 本來應該有 n 條彼此不互相影響的路徑相連通 , 否則並不需要拿到 n 點那麼多 !

定義 1.6. (分隔集 , Separating Set)

一個 $V(G)$ 的子集合 S 稱爲是兩點 u 與 v 的分隔集 , 如果 u 與 v 分別落在 $G-S$ 的兩個部分裡面 。

顯然 , 在 $G-S$ 是不連通圖的情況下才有所謂的分隔集 , 我們也稱 (u,v) 的最小分隔集所需要的點數 $\kappa(u,v)$, (Separating number) 。以下的定理是非常著名 , 而且也在網路的研究中扮演一個非常重要的角色 , 其證明是由 Dirac 所提供 。

定理 1.7. (Menger , 1927)

令 u 與 v 爲 G 中不相鄰的兩點 , 則 (u,v) 的分隔數恰好等於由 u 到 v 沒有共用點 (Internally Disjoint) 的路徑數 。

證明.

假設 $\kappa(u,v) = k$, 則 u 與 v 之間顯然最多只有 k 條沒有任 何共用點的路徑, 以下我們用歸納法證明至少有 k 條這樣的路徑存在。由於 $k=1$ 時 很容易看, 所以假設 $k \geq 2$, 現在如果假設在 $\kappa(u,v) = h \geq 2$ 時定理不對。令 G 爲使定理不對時點數最少, 邊數也最少的圖, 也就是說只需要 $G-e$ 中的 $h-1$ 個 點就可以分隔 u 和 v , 其中 e 爲 G 的任一邊。首先, 我們來看 G 有哪些特別的性 質。

(i) $N_G(u) \bigcap N_G(v) = \emptyset$

令 $e=xy$ 爲 G 的一邊, 則 $G-e$ 會被一個 $h-1$ 個點的集合 $S(e)$ 所分隔, 但是 $G-S(e)$ 仍 然會有一條由 u 到 v 的路徑, 因此, 這條路徑必定會通過 e , 也就是說 x 和 y 都不在 $S(e)$ 中 如果 $x \notin \{x,v\}$, 則 $S(e) \bigcup \{x\}$ 就是 u 和 v 在 G 中的一個隔集, 同時也存在 h 條互斥路徑。由上述的觀察, 不難看出, 如果 w (當 x) $\in N_G(u) \bigcup N_G(v)$, 則 $G-w$ 需 要 $h-1$ 個點才能隔開 u 和 v ; 由歸納法 $G-w$ 中有 $h-1$ 條彼此互斥的 $u-v$ 路徑, 加上 $u-w-v$ 就得 到 h 條, 這與 G 假設矛盾。

(ii) 如果 W 是具有 h 個點的 (u,v)-隔集, 則 W 中的點必然全部與 u 相鄰或則與 v 相鄰。(不會同時成立。)

由觀察, u 到 W 中的 h 個點 $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_h$ 存在有 h 條互斥路徑, 同理 v 到 W 中 的點也是如此, 同時, 任意的 $u-w_i$ 路徑與 w_i-v 路徑不會有 w_i 之外的共同點。現在假設 W 中的點沒有全部 與 u 或 v 相鄰, 如圖 2 所示, 則將 W 左邊的圖改成 $\{uw_1,\ uw_2,\ \ldots,\ uw_h\}$, 稱此新圖爲 G_1 , 於是 $|V(G_1)|<|V(G)|$, 而且 G_1 的 (u,v) 隔集仍爲 W 所以存在 h 條互斥 $u-v$ 路徑, 我們稱在 W 右邊的 h 條 w_i-v 路徑爲 Q_i , $i=1,\ 2,\ \ldots,\ h$ 。

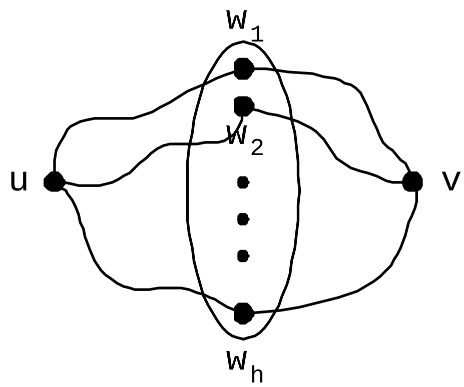


圖 2

同理, 在左邊得到 P_i , $i=1,\ 2,\ \ldots,\ h$; 現在再看原圖 G , 則 G 中顯然有 h 條互斥 (u,v) 路徑, 這與 G 的假設矛盾, 所以 (ii) 必成立。

現在, 令 P 爲 $u-v$ 最短路徑,$P=\{u,\ u_1,u_2,\ \ldots,\ v\}$, 由 (i) $u_2\neq v$ 。令 $S(u_1u_2)=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{h-1}\}$ 爲 $G-u_1u_2$ 的一個分割集。現在考慮 $W=S(u_1u_2)\bigcup\{u_1\}$, 因爲 W 爲一個具有 h 個點的分割集, 所以由 (ii) 因爲 u_1 不 與 v 相連, 所以 W 的點和 u 的點全部相鄰, 於是由 (i) $S(u_1u_2)$ 中的點必然全部與 v 不相鄰。現在再看 $W'=S(u_1u_2)\bigcup\{u_2\}$, W' 也是一個 h 點的隔集, 由於 $S(u_1u_2)$ 中的點 全部與 u 相鄰, 使得 u_2 去掉也必然與 u 相鄰, 這說明了 P 並不是由 u 到 v 的最短路徑, 矛盾 ; 於是定理得証。■

有了 Menger 的定理, Whitney 很順利地刻畫出 n-連通圖。

定理 1.8. 一個圖爲 n-連通的充要條件爲任兩點皆存在有 n 條互斥的路徑相連。

刻畫 n-連通圖尚有其他形式, 以下兩個定理的證明留當**作業 1.** 及**作業 2.**。

定理 1.9. 一個具有 $2n$ 點的圖它是 n-連通的充要條件爲這個圖的點集合可以任意分割成兩個大小一樣的子集合 V_1 與 V_2 , 同時存在有 n 條互斥路徑連接 V_1 與 V_2 中的點。

定理 1.10. 假如 G 是一個 n-連通圖, 則 G 中的任意 n 個點都會落在一個圈上。

定理 1.10 的逆敘述並不正確, 例如 C_n 。

作業3. : 如果 G 爲 n-連通圖, $n \geq 2$, 證明 $L(G)$ 也是一個 n-連通圖。

除了用 Menger 定理來刻劃一個 $n-$ 連通圖 , 明確地說出 $n-$ 連通圖的長相並不容易 。不過 , 當 $n = 3$ 的時候 , Tutte 排除很多的困難證明了以下非常出名的結果 , 證明在此省略 。

定理 1.11. 一個圖 G 爲 3− 連通圖的充要條件爲 G 本身是一個輪圖 (圖2) , 或者是 G 可以由下列兩類型的運算從一個輪圖建構出來 :

(i) 加一個新邊 ;

(ii) 把度數超過 3 的點 v , 用相鄰的兩點 v_1 與 v_2 取代 , 使得在新圖中 , 每個在 $N_G(v)$ 中點和 v_1 與 v_2 之一相連 , 同時維持 $deg(v_1) \geq 3$ 及 $deg(v_2) \geq 3$ 。(圖 3)

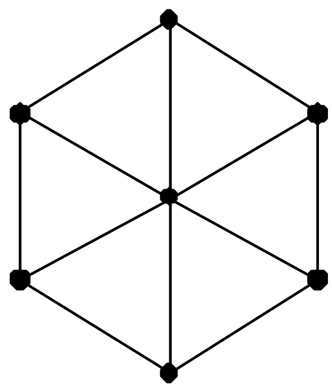


圖 2 : 輪圖

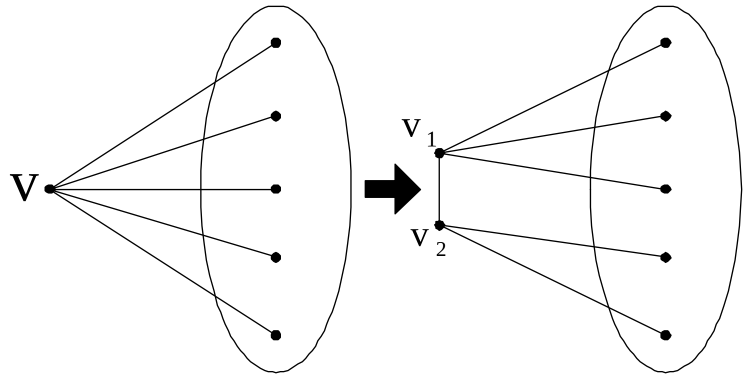


圖 3 : 運算 (ii)

2. 橋與邊切集（Bridge, Edge-Cut Set）

前面已經定義過橋，這裡再重述一次。

定義 2.1. 在一個圖 G 中，如果 $c(G-e) > c(G)$ 則 e 稱爲是 G 的橋。

由於去掉一邊頂多只會增加一個部份 (Component)；所以，事實上當 e 爲橋時，$c(G-e) = c(G) + 1$。在圖的分割理論中，橋有不一樣的定義方式，以後再另行介紹。

和前面切點的觀念相類似，如果 e 是橋，則必然存在兩點，它們之間的所有連接路徑都得經過 e；同時，也可以考慮去掉多邊之後才會形成不連通圖的概念。

定義 2.2.（邊連通數，Edge-Connectivity）
一個圖 G 的邊連通數 $\kappa_1(G) = min\ \{\ |T|\ |T \subseteq E(G)$ 且 $G-T$ 爲不連通圖 $\}$。(這裡的 $G-T$ 代表依次從 G 中扣掉 T 中的邊所得到的圖。)

以下的結果說明了度數，連通數與邊連通數的關係。

定理 2.3. 對於任意圖 G，令 $\delta(G)$ 代表 G 中點的最小度數。則 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G) \leq \delta(G)$。

證明. $\kappa_1(G) \leq \delta(G)$ 可以由去掉與最小度數點相鄰的邊獲得，所以主要證明左邊的不等式。首先，如果 $\kappa_1(G) = 0$，則顯然 G 爲不連通，所以 $\kappa(G)$ 亦爲 0。

接下來，如果 $\kappa_1(G) = 1$，則 G 有橋，於是去掉橋任一端點皆可造成不連通圖，$\kappa(G)$ 也是 1。現在假設 $\kappa_1(G) \geq 2$，於是在扣掉 $\kappa_1(G) - 1$ 邊之後，剩下的圖具有橋 uv。首先對於所扣掉的 $\kappa_1(G) - 1$ 邊各選擇一點與該邊相鄰的點，在 G 中扣掉這些點之後得到 H。如果 H 已經是不連通，則 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G) - 1 \leq \kappa_1(G)$，否則在扣掉 uv 中的一點就可以得到不連通圖，因此 $\kappa(G) \leq \kappa_1(G)$。 ■

上述定理的不等式皆可能成爲等式，也可能成爲不相等的式子，請參考圖 4。

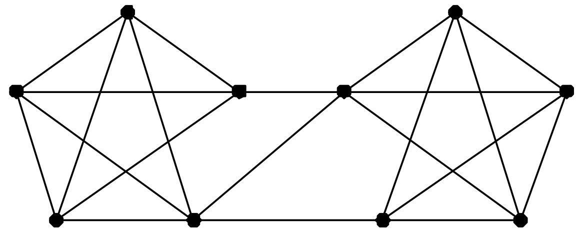


圖 4 : $\kappa(G)=2,\kappa_1(G)=3,\delta(G)=4$ 。

對應於點連通數 , 我們也可以用邊的消去來討論連通性 。

定義 2.4. 一個圖 G 在 $\kappa_1(G)\geq n$ 時 , 稱爲是 $n-$ 邊連通 , 亦即去掉 G 中的任何 $n-1$ 個邊都無法獲得不連通圖 。

對應於 $n-$ 連通圖的結果 , 以下的結果並不難證明 。

定理 2.5. 一個圖 G 是 $n-$ 邊連通的充要條件爲在 $V(G)$ 中不存在有一個非空子集合 W , 使得 $\langle W,V(G)\backslash W\rangle_G$ 中的邊數小於 n , 這裡的 $\langle A,B\rangle_G$ 代表所有在 G 中由 A 中點連到 B 中點的邊所成的集合 。

證明.
($\Rightarrow$) 如果這樣的 W 存在 , 則去掉 $\langle W,V(G)\backslash W\rangle$ 中的所有邊就得到一個不連通圖 , 於是 $\kappa_1(G)<n$, 矛盾 。
($\Leftarrow$) 假如 G 不是一個 $n-$ 連通邊 , 則必存在一個 $0\leq k<n$, 在去掉 k 邊之後 , 所得到的圖 H 爲不連通 , 令 H 中有一個部份爲 H_1 , 現在 $\langle V(H_1),V(G)\backslash V(H_1)\rangle$ 中最多只有 k 邊 (總共去掉 k 邊) , 所以敍述中的 W ($V(H_1)$) 存在 , 此爲矛盾 , 所以定理得證 。 ■

定理 2.6. 一個圖是 $n-$ 邊連通的充要條件爲任兩點間皆可以找到 n 條路徑 , 他們沒有共同使用的邊 。

證明. 作業4. 。

以下的結果非常特別 , 它刻畫了一類非常重要的圖 , 這類圖的邊連通數與最小度數是一樣的 。

定理 2.7. (Plesnik) 如果 G 的直徑爲 2 , 則 $\kappa_1(G)=\delta(G)$ 。

證明. 令 S 爲一個具有 $\kappa_1(G)$ 邊的邊集合 , 它使得 $G-S$ 爲一不連通圖 , 同時令 H_1 與 H_2 爲 $G-S$ 中的兩個部份並且滿足 $P_1=|V(H_1)|\le|V(H_2)|=P_2$ 。首先 , 我們證明 $\kappa_1(G)\ \ge\ P_1$ 。如果 H_1 中的每一點都連到 H_2 中的點 , 則顯然成立 。不然的話 , 令 $u\in V(H_1)$, 同時在 G 中 u 不與 H_2 中的任何點相鄰 ; 但是因爲 G 的直徑爲 2 , H_2 中的任何點都必然要與 H_1 中的某一點相鄰 , 或則是 H_1 中的每一點都連到 H_2 中的某一點 ; 因此 $\kappa_1(G)=|S|\ge min\{P_1,P_2\}=P_1$ 。

接下來看 $\delta(G)$ 。對於 $V(H_1)$ 中的每一點 x , 定義 $d_i(x)=|\ \{\ y\ |y\in V(H_i)$ 同時 $x\sim_G y\ \}\ |$ 。所以 $\delta(G)\le deg_G(x)=d_1(x)+d_2(x)\le P_1-1+d_2(x)$ 。... (*) 由於 $\delta(G)\ge\kappa_1(G)$, 所以 $P_1-1+d_2(x)\ge P_1$, 於是 $d_2(x)\ge 1$ 。現在 , 令 $V(H_1)=\{u_1,u_2,...,u_{P_1}\}$, 則

$\kappa_1(G)=|S|=\sum_{i=1}^{P_1}d_2(u_i)\ge(P_1-1)+d_2(u_{P_1})$。.........(**)

由 (*) 及 (**) , $P_1-1+d_2(u_{P_1})\ge\delta(G)\ge\kappa_1(G)\ge P_1-1+d_2(u_{P_1})$ 。這表示 $\kappa_1(G)=\delta(G)$ 。 ■

推論 2.8. 在一個圖 G 中 , 如果不相鄰兩點的度數和皆大於 $|V(G)|-2$, 則 $\kappa_1(G)=\delta(G)$ 。

證明. 對於 G 中任意不相鄰的兩點 u , v , 因爲 $deg_G(u)+deg_g(v)\ge|V(G)|-1$, 所以 $N_G(u)\cap N_G(v)\ne\emptyset$, 這表示 $d(u,v)=2$, 所以 G 的直徑爲 2 , 由定理 2.7 , 此定理得證 。 ■

作業5. : 證明在直徑爲 2 的圖中, 在去掉 $\kappa_1(G)$ 邊使得 它不連通之後, 必定有一個部分不是 K_1 就是 $K_{\delta(G)}$ 。

作業6. : 任給三個正整數 $a\le b\le c$, 證明必存在一個圖它滿足 $\kappa(G)=a$, $\kappa_1(G)=b$ 以及 $\delta(G)=c$ 。

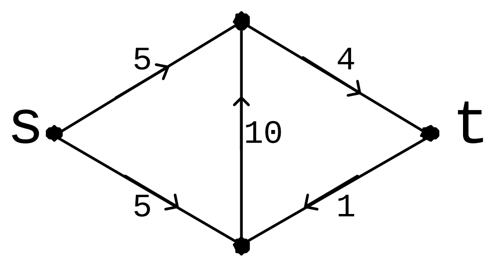
3. 網路 (Networks)

一個網路 N 是一個具有特殊性質的有向圖 D , 它具有下列特性 :

(i) 有一個點 s 叫出發點 (Source) , 有一個點 t 叫終點 (Sink) ; 以及

(ii) D 的弧上每一個弧都指定一個非負整數 , 稱爲是容量 (Capacity) , 這個指定的動作也稱爲是一個容量函數 (Capacity function) 。

例 1.



(iii) 由於我們所處理的是有向圖 , 所以鄰域的定義也有所不同 ; 我們一般以 $N_D^+(x) = \{y \in V(D) | (x, y) \in A(D)\}$ 來表示外接鄰域 , 而以 $N_D^-(x) = \{y \in V(D) | (x, y) \in A(D)\}$ 來表示內接鄰域 。如果對單一的網路討論 , 我們用 $N^+(x)$ 及 $N^-(x)$ 來表示外接與內接鄰域 。接下來 , 我們定義一個網路的物流 (Flow) 。

定義 3.1. (Flow) 令 c 爲網路 N 的一個容量函數 , 同時 s 和 t 分別爲網路的出發點和終點 。一個網路的物流是指一個定義在 $A(D)$ 上的一個整數值函數 f , 它滿足下列兩個條件 :

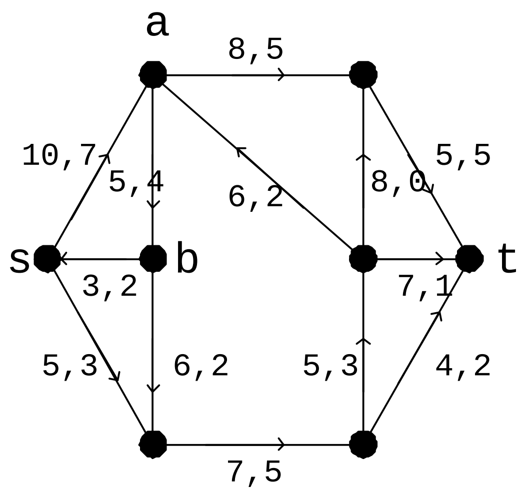
(1) $0 \leq f(a) \leq c(a)\ \forall a \in A(D)$; 以及

(2) 對於所有不同於 s 與 t 的點 , $\sum\limits_{y \in N^+(x)} f(x, y) = \sum\limits_{y \in N^-(x)} f(y, x)$, 其中 $f(x, y) = f((x, y))$ 。(保守方程 , Conservation Equation) 。

由上述的 (1) , 當 $f(a) = c(a)$ 時 , 則稱 a 爲飽和弧 (Saturated) , 而當 $f(a) < c(a)$ 時 , 則稱 a 爲不飽和的弧 。另外 , $\sum\limits_{y \in N^+(x)} f(x, y) - \sum\limits_{y \in N^-(x)} f(y, x)$ 稱爲 x 點的流出淨量 , 而反過來相減則爲流入淨量 , 顯然在滿足保守方程的情況下 , 除了 s, t 之外其他點的這兩個量都是 0 ; 所以 , 在 s 則有非負

的流出淨量，t 則有非負的流入淨量，同時在正常物流的情況下這兩值會相等。

例2. 圖中的弧上有兩個數字，第一個為容量，第二個則為流量。



s：流出淨量 8，t：流入淨量 8

為了方便起見，我們用 (X,Y) 代表所有由 X 中的點連接到 Y 中點的弧所成的集合，亦即 $(X,Y)=\{(x,y)|x\in X, y\in Y\}$，同時，如果 g 為定義於 $A(D)$ 的函數，則令 $g(X,Y)=\sum\limits_{(x,y)\in(X,Y)} g(x,y)$，如果 $X=\{x\}$，則 $g(X,Y)$ 直接寫成 $g(x,Y)$，同理，當 $Y=y$ 時，寫成 $g(X,y)$。

值得注意的是，在上述定義中，$X\cap Y$ 不一定要是空集合，實際上，$g(X\cup Z,Y)=g(X,Y)+g(Z,Y)-g(X\cap Z,Y)$，同時 $g(X,Y)=\sum\limits_{x\in X} g(x,Y)=\sum\limits_{y\in Y} g(X,y)$。以下的定理不難證明，証明省略。

定理 3.2. 令 N 為一個網路，它的起點與終點分別為 s，t。同時 D 為決定 N 的有向圖，則對於 N 中的任一個物流 f，$f(s,V(D))-f(V(D),s)=f(V(D),t)-f(t,V(D))$。

上述定理的 $f(s,V(D))-f(V(D),s)$ 就是 f 在 N 中的流出淨量（在 s 點），一般以 $valf$ 表示，簡稱為物流 f 的量或是 f 的流量。對於任何其它物流 f' 而言，如果 $valf\geq valf'$，則 $valf$ 也稱為是 N 的最大流量。由於網路中每個弧的容量皆定義為有限的值，所以求出最大流量是辦得到的事。（註）：在每一個弧上的物流皆不得超過該弧的容量。

所以，流量的大小必然與容量有著密不可分的關係。(流量不大於容量。)

定義 3.3. (網路切集，Cut)

在一網路 N 中，令 X 爲包含起點 s 的集合，同時 $t \notin X$，則 $K = (X, V(D)\backslash X)$ 爲網路 N 的一個切集。切集容量的大小爲

$$c(X, V(D)\backslash X) = \sum_{(x,y)\in(X,V(D)\backslash X)} c(x,y)$$

，一般也用 $capK$ 表示。在例 2 中，如果 $X = s, a, b, c$，則 $capK = 15$。

定理 3.4. 對於 N 中的任意物流 f 以任意切集 $K = (X, X')$，$valf = f(X, X') - f(X', X) \leq capK$。

證明. 因爲 f 爲 N 中的一個物流，所以對於所有不是 s，t 的點 x，$f(x, V(D)) = f(V(D), x)$，同時 $valf = f(s, V(D)) - f(V(D), s)$，於是推得

$\sum\limits_{x\in X} \{f(x, V(D)) - f(V(D), x')\} = f(x, V(D)) - f(V(D), x') = valf$。

又因爲 $f(X, V(D)) = f(X, X \cup X') = f(X, X) + f(X, X') - f(X, X \cap X')$，$f(V(D), X) = f(X \cup X', X) = f(X, X) + f(X', X) - f(X \cap X', X)$。所以 $valf = f(X, X') - f(X', X) \leq f(X, X') \leq cap(X, X')$。 ■

推論 3.5. (min-max 性質)

令 f 與 K 分別爲 N 中的一個物流及切集，同時滿足 $valf = capK$，則 f 爲最大物流，K 爲最小切集(容量和最小)。

證明. 假如 f^* 及 K^* 分別爲最大物流及最小切集，則 $valf \leq valf^* \leq capK^* \leq capK$。由於 $valf = capK$，所以 $valf = valf^*$，而且 $capK^* = capK$。

■

推論 3.6. 如果 f 與 c 分別爲網路 N 的物流及容量函數，同時滿足：

(i) 對於所有的 $a \in (X, X')$，$f(a) = c(a)$，及

(ii) 對於所有的 $a \in (X', X)$，$f(a) = 0$。

則 f 爲最大物流，(X, X') 爲最小的切集。

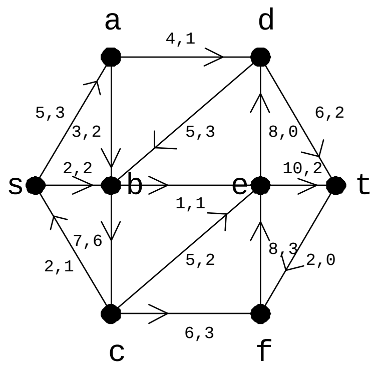
證明. 令 f^* 爲最大物流，所以 $calf^* \leq cap(X, X) = f(X, X') - f(X', X) = valf$，所以 f 爲最大物流。同理可證，(X, X') 爲最小切集。 ■

作業7. 求例 2 中網路的最大流量。

由推論 1.5 可知，要求一個網路的最大物流，最小切集扮演著對等的角色，但是要達到這個目的，需要找到一個物流，它的流量恰好等於某一切集的容量。以下的定理主要是在說明，在什麼情況下一個物流具有最大的流量；再利用這個定理來證明最大流量就等於最小的切集的容量。

首先，介紹半路徑（Semipath）。如果不考慮方向，則網路圖 D 上的任意路徑皆稱爲是 D 中的半路徑，例如，例 2 中的 $s - a - b$。換言之，一個由 U 到 V 的半路徑 $u - u_1 - U_2 - ... - u_t = v$，$(u_i, u_{i+1})$ 與 (u_{i+1}, u_i) 中的一個弧必然是在 D 中的一個弧，這裡的 $i = 1, 2, ..., t-1$。

接下來再看一個物流在一個半路徑上的現象：我們稱一個半路徑爲 $f-$不飽和，若且唯若對於所有的 $i = 1, 2, ..., t-1$，不是 $f(u_{i-1}, u_i) < c(u_{i-1}, u_i)$ 就是 $f(u_i, u_{i-1}) > 0$。如果一個不飽和的半路徑是 s 爲起點，t 爲終點，則這個 $f-$不飽和 的半路徑又稱爲是一個對於 f 可以增值的半路徑（f-augmenting semipath）。以下是一個例子（圖 6）。



$s - a - d - t$，$s - c - e - t$，$\cdots$，爲可增值半路徑。

圖 6

顯然，當可增半路徑沒有的時候，那樣的物流具有最大流量。

定理 3.7. 網路 N 中的物流 f 爲最大物流的充要條件是在 N 中的 D 找不到 $f-$ 可增值的半路徑。

證明. (摘要) 對於與 s 到 t 有同方向的弧 a，如果一個經過 a 物流可以增值，則必然會有 $c(a) > f(a)$，否則無法增加 $f(a)$；在另一方面，如果 a 與 $s-t$ 的方向相反，則 $f(a) > 0$ 會使得前進方向多些流量，基本上是 " 縮小 $f(a)$ " 即可。證明細節留當 **作業8.**。 ■

定理 3.8. (Ford 及 Fulkerson) (最大流量 - 最小切集定理)
在一個網路中，最大流量恰等於最小切集的容量。

證明. 由定理 3.7，推得 $valf = f(X, X') - f(X', X)$ (沒有可增值的半路徑) $= cap(X, X')$ (設 (X, X') 爲最小切集)。 ■

利用定理 3.7 的基本概念，Edmonds 和 Karp 提供了一個演算法來求物流的最大流量，讀者可參考 Chartrand 和 Lesniak 所著的 Graphs and Designs，那兒有詳細的說明。接下來我們主要是介紹如何應用定理 3.8 來解決一般的組合問題。

4. 最大流量 - 最小切集定理的應用

首先 , 我們探討 Menger 定理的有向形式 。

定理 4.1. 假如 u 與 v 爲有向圖 D 的兩相異點 , 則最多的弧互斥 $u-v$ 路徑數等於最小 $u-v$ 弧隔集 (Arc separating set) 的弧數 。(這裡的 $u-v$ 弧隔集是指去掉這些弧之後 u 與 v 不連通 。)

證明. 令 m 代表互斥的 $u-v$ 路徑 , 而 n 代表最小弧隔集的弧數 。由於 $u-v$ 路徑數不可能超過弧隔集的弧數 , 所以 $m \leq n$ 。以下主要是證明 $m \geq n$ 。令由 D 所建構的網路是 N , 而且網路上每一弧的容量皆爲 1 , 現在 , 假設 N 的最大物流量爲 f , 而最小切集爲 K 。如果我們能證明 $n \leq capK$ 及 $valf \leq m$, 則定理得證 。

由於 K 是一個 $u-v$ 弧隔集 , 所以 $n \leq capK$ 沒有疑問 。另外 , 因爲 f 是整數值函數 , 而且對於所有的弧 a , $c(a)=1$, 所以 $f(a)=0$ 或 1 。

令 $D' = D \backslash A'$, 其中 $A' = \{a \in A(D) | \, f(a)=0\}$ 。我們很容易看出 $val \ f = od_{D'}u = od_D v - id_D v$, 這說明了在 D 中至少有 $val \ f$ 條互斥的 $u-v$ 路徑 , 亦即 $m \geq val \ f$ 。由 $val \ f = cap \ K$, $m \geq n$, 定理得證 。 ■

用相似的概念 , 點形式 、邊形式的 Menger 定理 , 都可以再以定理 3.8 來證明它們 , 接下來看一個比較不一樣的應用 :

定理 4.2. (Hall's Theorem , 1935)

令 $G=(X,Y)$ 爲一二分圖 , 則在 G 中存在一個碰到 X 中每一點的配對之充要條件爲對於 X 的任一個部分集合 W , $|N_G(W)| \geq |W|$, 這裡 $N_G(W) = \{N_G(x) | x \in W\}$ 。

證明. 這個定理的必要性是無庸置疑 , 我們只需證明它的充分性 。首先 , 定義一個網路 G_{st} , 網路中的點是它的弧 , 規定如下 :

(1) s 連向 X 中的所有點 ,

(2) X 中的點經由 $E(G)$ 中的邊連向 Y 點 ,

(3) Y 中的點均連向 t , 而最後在每一個弧上指定容量爲 1 。

顯然 , 如果能在 G_{st} 上找到一個物流 f , 使得 $valf = |X|$, 則定理得證 。這等於是要證明最小切集的容量爲 $|X|$ 。

由於令 $W=\{s\}$, $(W,\overline{W})$ 這個切集的容量是 $|X|$, 所以只要能證明任意其它的切集 , 它的容量都至少為 $|X|$ 即可。令 (V_s,V_t) 為一切集 , 同時 $s\in V_s$ 以及 $t\in V_t$。由弧集合來看 $(V_s,V_t)=(s,V_t\cap X)\cup(V_s\cap X,V_t\cap Y)\cup(V_s\cap Y,t)$ (參考圖 18) 再令 $V_s\cap X=W$, 則 $cap(V_s,V_t)=|(s,X\backslash W)|+|(W,V_t\cap Y)|+|(V_s\cap Y,t)|$ (容量皆為 1)

$=|X\backslash W|+|(W,V_t\cap Y)|+|(V_s\cap Y,t)|$

$\geq|X\backslash W|+|V_t\cap N(W)|+|V_s\cap Y|$

$=|X\backslash W|+|N(W)|-|V_s\cap N(W)|+|V_s\cap Y|$

$\geq|X\backslash W|+|N(W)|-|V_s\cap Y|+|V_s\cap Y|$

$\geq|X\backslash W|+|W|=|X|$ 。

定理得證 。 ■

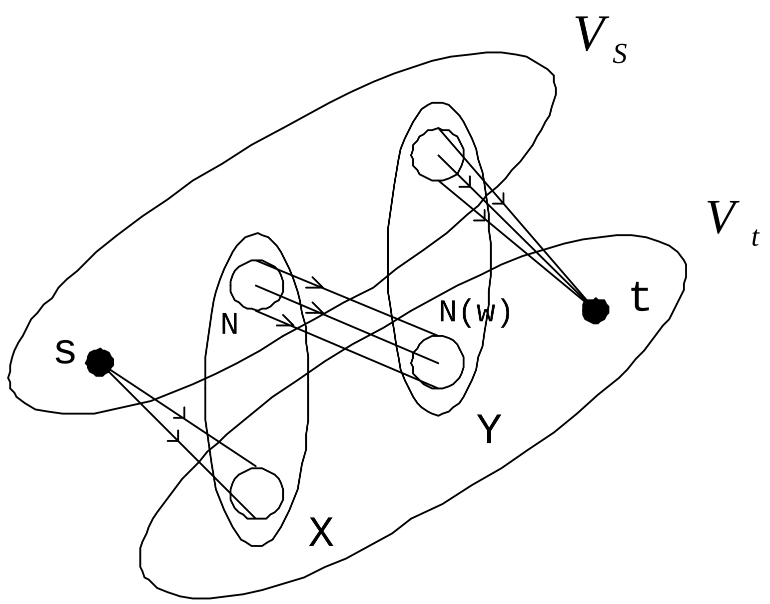


圖 18 : $G_{s,t}$

有了定理 4.2 , 相異代表系 (System of Distinct Representatives , SDR) 的定理就很容易證明 。

定理 4.3. (Hall's Condition)

令 $S = S_1, S_2, ..., S_n$ 爲一個非空有限集合 A 的部份集合所形成的集合族。則存在一組 n 個相異元素 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 使得 $x_i \in S_i$, $i = 1, 2, ..., n$ 的充要條件爲 S 中任意的 k 個集合之聯集至少含有 k 個元素。

証明. (**作業9.**)。

作業10. 另外 ; 具有相同行和及列和的 $(0,1)-$方形矩陣都可以寫成排列矩陣的和。