第二章　　尤拉迴路與哈米爾頓圈

在這一章中, 我們準備介紹兩種特殊圖 ; 它們不論是在圖論的發展或是在應用上都佔有非常重要地位。

1.　尤拉迴路 (Euler Circuit)

首先, 我們看尤拉迴路 ; 它可以說是圖論研究的第一個問題, 早在二百多年前就已經開始了。當時瑞士數學家尤拉 (Leonhard Euler) 因爲研究七橋問題而發展出這種圖。所謂七橋問題是發生在現今德國境內 : 當布魯格 (Pregel) 河流經哥尼斯堡 (Königsberg) 附近時形成兩個大沙洲, 如下圖。爲了彼此的連繫, 在當時共建了七座橋, 有不少人試著從一個地方出發, 希望在不重複的情況下走完此七座橋, 然後回到 原地。問題是可以辦到嗎?

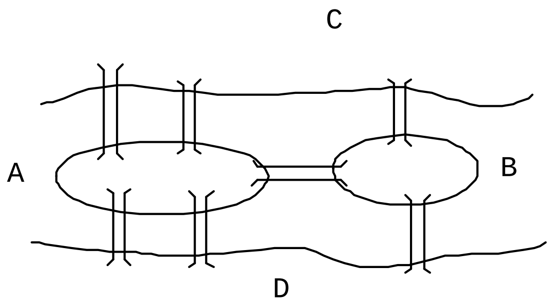


圖 1 : 哥尼斯堡的七橋

以圖的方式來看圖 1, 則可以把 A , B , C , D 看成是點, 橋爲邊, 於是得到一個重邊圖, 圖 2。現在七橋問題等於在問圖 2 中是否找到一 個迴路通過所有的邊。

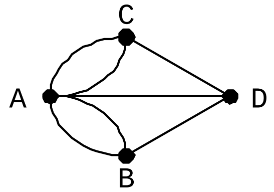


圖 2 : 七橋問題之對應圖

看出圖 2 不含任何通過所有邊的迴路是不困難的事, 因爲一但有這種迴路存在, 則圖上的所有點必然是偶點 (進出的現像) , 但是要證明 逆敘述就得花一點力氣了。

定義 1.1. (尤拉圖 , eulerian graph)

一個圖若是存在一個迴路通所有的邊, 則此圖稱爲是尤拉圖, 此時, 該迴路也稱爲是圖中的一個尤拉迴路。

定理 1.2. 一個圖 G 是尤拉圖的充要條件爲圖 G 爲連通圖且圖中的每一點都是偶點。

證明.

$(\Rightarrow)$

如上述說明。

$(\Leftarrow)$

由歸納法, 顯然當 G 只有一點或兩點時原敍必成立。假設當$|V(G)| \leq n$, 亦即當每個點都是偶點時, G 爲尤拉圖。令 H 爲一連 通圖, 其中 $|V(H)| = n+1$ 而且 H 中的每一點都是偶點。令 $v \in V(H)$, 且而 $N_H(v) = \{v_1, v_2, ..., v_{2i-1}, v_{2i}\}$ 。現在考慮 $H' = (H - v) \bigcup (v_1v_2, v_3v_4, ..., v_{2i-1}v_{2i})$ 。顯然 H' 具有 n 個點, 而且每個點都是偶點, 同時 H' 最多是 i 個部分 (Components) 所形成的圖。由歸納假設, 每個部份都是尤拉圖 ; 現在把每個部分的尤拉迴路畫出來, 當這些迴路 通過 $v_1v_2, v_3v_4, ..., v_{2i-1}v_{2i}$ 中的任一邊 $v_{2j-1}v_{2j}$ 時, 將此迴路改道成 $-v_{2j-1} - v - v_{2j}$ (去掉 $v_{2j-1}v_{2j}$) , $j = 1,\ 2,\ ...,\ i$, 則我們求得 H 的一個尤拉迴路, 所以 H 爲尤拉圖, 定理得證。 ■

這個定理的證明尚有其它不同的方式, 請自行另證 (**作業**1.)

雖然我們可以證明定理 1.2, 但是在一個複雜的尤拉圖把尤拉迴路畫出來的確不是一件容易的事；以下的演算法就針對如何有效地找到尤拉迴 路提供一個方法。

任給一個尤拉圖畫尤拉迴路之演算法 (Fleury)

步驟 1. 令 $i = 0$, 並且任選 G 中的一點 v_0 以及定義 $T_0 : v_0$ 。

步驟 2. T_i : v_0 , v_1 ,..., v_i , 這個步徑已經找到, 接下來再找 v_{i+1} , 這時候 v_iv_{i+1} 不是 $G \setminus \{v_0v_1, v_1v_2, ..., v_{i-1}v_i\}$ 中的一條橋。若無 v_iv_{i+1} 存在, 則停止。

步驟 3. 定義 $T_i + v_iv_{i+1}$ 。

步驟 4. 用 $i + 1$ 取代 i , 然後回到步驟 2。

上述演算法簡單說就是要避開橋, 除非該邊是剩下的唯一邊。

定理 1.3. Fleury 的演算法所找到的就是尤拉迴路。

證明.

(扼要說明) 由於尤拉圖中的每一個點都是偶點, 所以當這演算法繼續做, 最後一定會接回原來出發的點, 所以擔心的是無法經過所有的邊。

然而, 如果沒有走過全部的邊表示中途在可以選擇的情況下選了橋, 那是演算法所避免的；因此不會剩下邊沒走過。(全部是偶點的圖不會有橋存在！**作業**2.) 。 ■

有些圖, 雖然不是尤拉迴路, 但是, 它可以由一點出發在走完所有邊時到達另一點, 也就是有一個經過全部邊的步徑, 一般也稱爲是一筆畫 (eulerian trail) 如下圖。

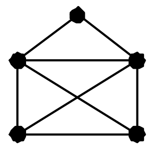


圖 3 : 一筆畫的圖

定理 1.4. 一個連通圖可以一筆畫的充要條件爲該圖最多有兩個奇點, 而且這一筆畫的起點與終點可能存在的兩個奇點。

證明.

若是 G 中的所有點皆爲偶點, 則 G 自然可以一筆畫。現在, 假設 u , v 爲 G 中的兩個奇點。首先, 如果 $uv \notin E(G)$, 則連接 u ,v 得到 G' ; 現在 G' 爲一尤拉圖, 令 C 爲一個尤拉迴路, 則 $C \setminus uv$ 就是 G 的一個步徑, 由 u 到 v , 而且通過所有 G 中的邊。再來, 如果 $uv \in E(G)$, 令 G' 爲一圖, 它滿足 $V(G') = V(G) \bigcup \{w\}$ 以及 $E(G') = E(G) \bigcup \{wu,\ wv\}$ 。同理 G' 爲一尤拉圖, C 爲一尤拉迴路, 此時從 C 中扣掉 wu 及 wv 就可以得到 G 的一筆畫。■

定理 1.5. 令 G 爲具有 $2n$ 個奇點的連通圖,$n \geq 1$ 。則 $E(G)$ 可以分割成 n 個步徑 E_1 , E_2 , ... , E_n 使 得其中最多只有一個步徑它具有奇數個邊。

證明.

首先, 如果有兩條步徑 E_i 及 E_j 它們都有奇數條邊而且 $T_i =< E_i >_G$ 與 $T_j =< E_j >_G$ 兩個邊導出子圖有共用的點, 令 w 爲其中一點, 則 $T_i \bigcup T_j$ 可以經由重組而形成兩條步徑 E_i^* 與 E_j^* 使得 E_i^* 與 E_j^* 分別都有偶數條邊 (?) 。繼續上述步驟, 如果只剩下一條奇數邊的步徑, 則推論得證 ; 否則必存在兩條奇數邊的步徑 E_k 與 E_l , 它們沒有任何的共通點。現在令 w_k 與 w_l 分別爲 E_k 與 E_l 上面的點, 它是兩步徑間最接近的兩點, 再令連接這兩點的最短路徑爲 P 而且 $w_k w_0 \in E(P)$ 。由已知, G 已經被分割成步徑 所以 $w_k w_0$ 必然是某一步徑上的邊, 令此 $u-v$ 步徑爲 T ; T 必然是具有偶數邊, 否則 E_k 可以與 T 合在一起 而轉換成兩條偶數邊的步徑。現在考慮 T 的部份步徑 T' (由 u 到 w_k) , 剩下的部份稱爲是 T'' , 自然地, $w_k w_0$ 在 T'' 中。

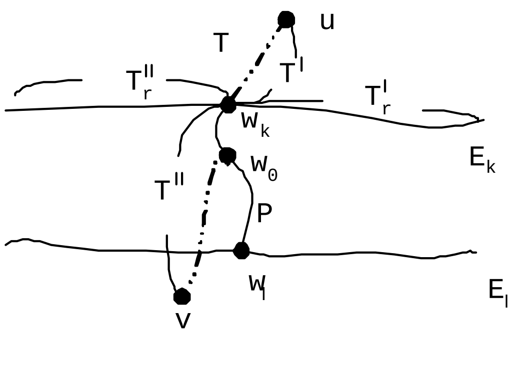


圖 4

如圖 4 所示, 我們準備把 E_k , E_l , 及 T 混在一起, 然後再重新分割。令 $T_r^1 = T_r' \bigcup T''$, $T_r^2 = T_r'' \bigcup T''$, 顯然, 其中一條具有奇數邊。假設 T_r^1 具有奇數邊, 於是 $T_r'' \bigcup T''$ 具有偶數條邊。經過這個步驟之後, 原來的 E_k 與 E_l 為 T_r^1 與 E_l 所取代, 而它們的最近距離比原來的 $d(w_k, w_l)$ 小 (T_r^1 上面有 w_0 這個點) ; 由於這個交換過程不會影響到其它具有奇數條邊的步徑, 所以可以繼續, 直到換出來的兩條奇數邊步徑具有共同的點, 如此一來就可以使用前面的方法, 將它們換成兩條偶數邊的步徑, 定理得證。 ■

有了分割的概念, 我們再回頭看看尤拉圖的圈分割。

定理 1.6. 一個連通圖為尤拉圖的充要條件是 G 可以分割成 E_1 , E_2 , ... , E_n , 其中對於所有的 $1 \leq i \leq n$, $< E_i >$ 是 G 中的圈。

證明.

($\Rightarrow$)

從 G 中逐圈拿走即可。

($\Leftarrow$)

令 $C_i = < E_i >$, $1 \leq i \leq n$, 任選兩個 C_i , C_j , 其中 $V(C_i) \bigcap V(C_j) \neq \emptyset$, 則 $C_i \bigcup C_j$ 為一迴路, 接下來再選一 C_k 使得 $(V(C_i) \bigcap V(C_j)) \bigcap V(C_k) \neq \emptyset$, 繼續如此步驟即可得 G 的一個尤拉迴路。(上述方法可以繼續下去的理由是 G 為連通圖。) ■

在這裡特別說明一下圈的大小 ; 再討論尤拉圖的時候, 一般我們同意在圖中有重邊, 也就是我們考慮重邊圖 ; 在這情況下, 具有兩邊 的圈 (Double Edge) 也就出現了, 當然, 我們不排除有這樣的圈。然而, 一般而言, 三邊以上的圈是比較受歡迎。為了便於說明, 以下 均以一般圈 (邊數 ≥ 3) 稱之。

圈雙重覆蓋猜測 (Cycle Double Conjecture)

任何一個沒有橋的簡單圖都可以找到一些一般圈 C_1 , C_2 , ... , C_n , 使得每個邊恰好出現在不同的兩個圈。

這個猜測截至目前為止仍然無法獲得有效的證明, 或是反例的提出。不過曾經有人想過以下的概念 ; 首先把每一邊都再畫一次, 於是原圖 變成是一個尤拉圖。由定理1.6 一個尤拉圖可以被分割成圈, 於是每一個邊就出

現在兩個分割出來的圈。(?) 這個證明的瑕疵就出現在尤拉 圖所分割出來的圈可能會有兩邊所形成的圈。

我們可以把尤拉圖推廣至有向圖, 這時候的步徑自然要有方向, 而且要一致, 所以它的要求就會更多一些。

定理 1.7. 令 D 爲一有向的連通圖。則 D 爲尤拉圖的充要條件爲在 D 中的每一點 v , $od_D(v) = id_D(v)$ 。

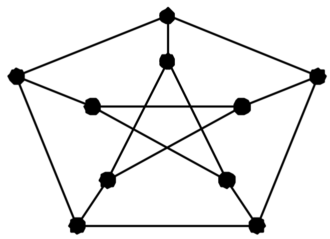
一筆畫及有向步徑的分割不再重述。

定理 1.8. D 爲有向尤拉圖的充要條件是 D 可以分割成有向圈。

作業3. : 證明定理 1.7。(*)

作業3. : 證明若 G 爲尤拉圖, 則 $L(G)$ 必爲尤拉圖 ; 而它的逆敍述不一定對。

作業3. : 在下圖中要去掉多少邊才會使得剩下的部份圖是尤拉圖。



2. De Bruijn 數列及郵差問題

這一節, 我們將討論兩個尤拉圖概念的應用。

定義 2.1. (de Bruijn Sequence)

一個循環數列 $(a_1,\ a_2, ...,\ a_{2^n})$ 稱爲是 $(2,n)$- de Bruijn 數列如果下列兩個條件滿足 :

(1) $a_i \in \{0,1\}$, $i=1,\ 2, ...,\ 2^n$; 且

(2) $(a_j,\ a_{j+1},\ ...\ ,\ a_{j+n-1})$, $j=1,\ 2,\ ...\ ,\ 2^n$, $(\mathrm{mod}\ 2^n)$, 爲相異的 2^n 個 n 維向量。

例1. $n\ =\ 1,\ 2,\ 3,\ 5$; $(2,n)$-de Bruijn 數列分別爲 (括號, 逗號省略)

$01,\ 0110,\ 01110100,\ 0000100110101111$ 。

對於所有的 n 要建構一個 $(2,n)$- de Bruijn 數列並不困難, 以下是荷蘭數學家 N. de Bruijn 用來尋找這種 數列的有向圖。

定義 2.2. ($(2,n)$-de Bruijn 有向圖, $D_{2,n}$)

$D_{2,n}$ 爲一加權有向圖, 它滿足下列兩條件:

(1) $V(D_{2,n})\ =\ (Z_2)^{n-1}$ 及

(2) $(a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_{n-1})$ 連到 $(a_2,\ a_3,\ ...\ ,\ a_{n-1},\ a_n)$ 並且在這個弧上給予加權 $(a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_n)$ 。

例2.

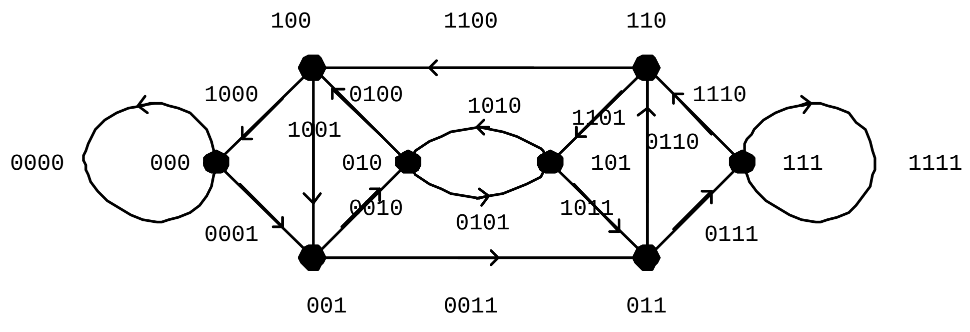


圖 5 : $D_{2,4}$

由定義, 我們可以證明 $D_{2,n}$ 爲一有向的尤拉圖。

引理 2.3. $(2,n)$-de Bruijn 有向圖爲尤拉圖。

證明.

因爲 $D_{2,n}$ 爲強連通圖而且每一點的內度與外度均爲 2, 故得證。 ■

引理 2.4. 在 $(2,n)$-de Bruijn 有向圖上的加權全部不一樣。

證明.

由定義可得。 ■

定理 2.5. 對於所有的 n , $(2,n)$-de Bruijn 數列存在。

證明.

首先, 由引理 2.3, 一個 $(2,n)$-de Bruijn 有向圖存在, 所以存在一個尤拉迴路 ; 現在, 令此迴路經過的邊爲 e_1, e_2, ... , e_{2^n} ; 同時對於所有的 i 令 $l(e_i) = a_i$ 爲 e_i 邊上加權的 最左邊那個數字, 於是我們得一個數列 $(a_1, a_2, \ldots, a_{2^n})$, 這個數列就是一個 $(2,n)$-de Bruijn 數列。(**作業**6.) ■

以下的例子也許有助於了解上述的證明。

在$D_{2,4}$中的尤拉迴路可以是

$$\texttt{000} \xrightarrow{\texttt{0000}} \texttt{000} \xrightarrow{\texttt{0001}} \texttt{001} \xrightarrow{\texttt{0010}} \texttt{010} \xrightarrow{\texttt{0100}} \texttt{100} \xrightarrow{\texttt{1001}} \texttt{001} \xrightarrow{\texttt{0011}} \texttt{011}$$
$$\xrightarrow{\texttt{0110}} \texttt{110} \xrightarrow{\texttt{1101}} \texttt{101} \xrightarrow{\texttt{1010}} \texttt{010} \xrightarrow{\texttt{0101}} \texttt{101} \xrightarrow{\texttt{1011}} \texttt{011} \xrightarrow{\texttt{0111}} \texttt{111}$$
$$\xrightarrow{\texttt{1111}} \texttt{111} \xrightarrow{\texttt{1110}} \texttt{110} \xrightarrow{\texttt{1100}} \texttt{100} \xrightarrow{\texttt{1000}} \texttt{(000)}$$

(2,4)-de Bruijn 數列爲 0000100110101111 , 而它所產生的 16 個不同之向量依次爲 16 個加權向量。

De Bruijn 數列最出名的應用是在旋轉鼓 (Rotating Drum) 。它可以利用連續的位置來判斷不同的輸入 (機械原理) , 如下圖所示。

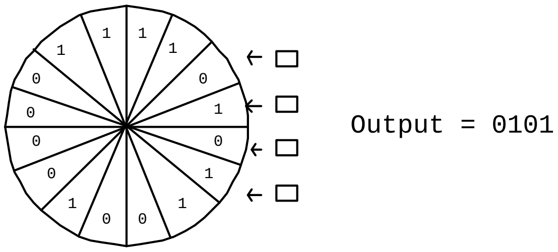


圖 6 : 旋轉鼓

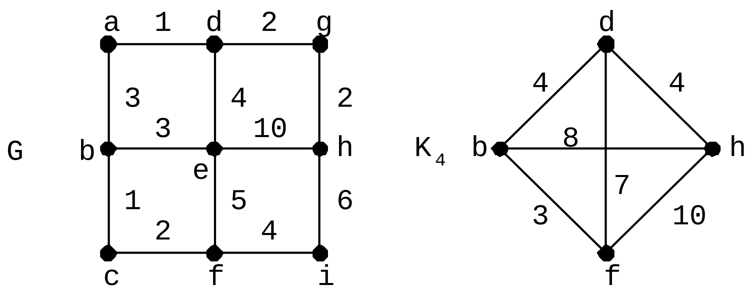
另一個出名的應用是由華裔數學家管梅谷 (Meigu Guan) 所提出來, 後來 J. Edmonds 稱它爲中國郵差問題。

定義 2.6. (郵差路線 , Postman Tour)
任給一個圖 G 所謂郵差路線是指在 G 中的一個封閉步行 (Closed Walk) , 它通過 G 中的每一個邊至少一次。

定義 2.7. (最佳的郵差路線 , Optimal Postman Tour)
在一個加權圖中, 一個郵差路線所經過的邊加權總和爲最小時, 我們稱這路線爲最佳郵差路線。

這個問題看來十分複雜。因爲所考慮的圖千萬化, 然而, 在提出這個問題 (尋找最佳郵差路線) 之後不到十年, 即 由 Edmonds 和 Johnson 所解決, 他們提供了一個多項式時間 (Polynomial-time) 的演算法來找出最佳路線。

在沒有介紹演算法之前, 我們先看一個例子。在 G 中有 4 個奇點, 現在利用這 4 點建構一個加權的 K_4 , 在邊上的加權爲兩點在 G 中的最短距離 (加權) 。接著在 K_4 中找到不相鄰的兩邊 (配對) 使得



它們的加權和最小, 此例中的 bf 即 dh , 最後再將原圖 G 改爲 G^* , 如圖7, G^* 的尤拉迴 路即爲所求。

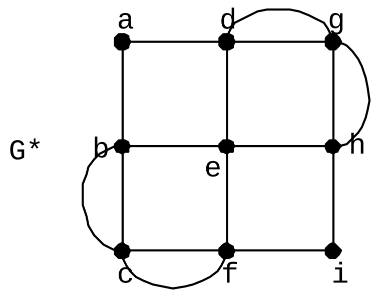


圖 7 : 最佳郵差路線

演算法 (Edmonds **及** Johnson) (**摘要**)

1. 令 S 爲 G 中奇點所成的集合。

2. 利用 S 的點建構一個加權完全圖 $K_{|S|}$, ab 邊上的加權爲由 a 到 b 的最短距離 (加權路徑) 。

3. 在 $K_{|S|}$ 中選出 $\frac{|S|}{2}$ 個獨立邊, 使得它們的加權總和爲最小。

4. 對應於 3 中的獨立邊, 將所經過的邊 (最短路徑) 全部加上相同加權的邊。

5. 由 4 所得到的圖之尤拉迴路即爲所求。

證明.
3 的找法是多項式時間, 所以這個演算法也是, 詳細證明在此省略。■

其它方面上有不少應用, 例如在掃街路線的安排, 要怎樣行駛才最省經費 ; 在 RNA 的重組方面如何利用片斷資 訊來得到完整的 RNA ; 以及在資訊傳遞方面如何編碼才更有效率地把資料表現出來, 都可以利用有向的尤拉圖 來達到目的 ; 由於篇富有限在此省略, 請自行參考由 Gross 及 Yellen 所寫的書 ”Graph Theory and its Applocation”。

3. 哈米爾頓圖 (Hamiltonian Graph)

一個哈米爾頓圈是通過圖上所有點的圈, 而具有哈米爾頓圈的圖稱爲是哈米爾頓圖 (Hamiltonian Graph) 。這種圖有 此名字據説是因爲愛爾蘭數學家哈米爾頓爵士在 1857 年發明了一種環遊世界的遊戲 ; 它是在一檜木製的正十二面 體的 20 個角落填入當時著名的 20 個都市, 如倫敦、紐約、...、等, 然後讓參加遊戲者任意由一個都市出發, 在不 重覆都市的情況下走完全部都市並回到起點。(圖 8)

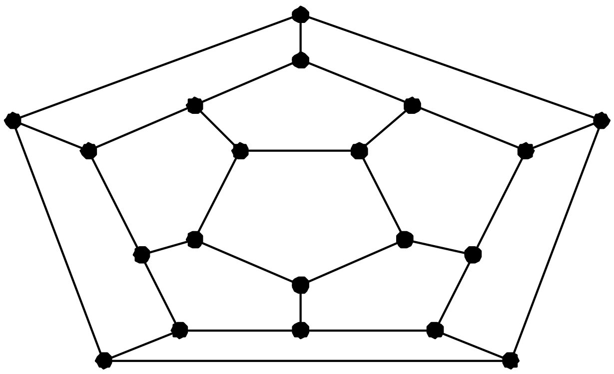


圖 8 : 正十二面體

不像尤拉迴路的尋找那麼幸運, 決定一個圖是否含有哈米爾頓圈是非常困難的問題。僅管圖論學家在一百多年來 不斷地努力, 目前仍然停留在提供具有哈米爾頓圈的充分條件, 而無法刻劃出哈米爾頓圖。我們先從判斷一 個圖不是哈米爾頓圖開始。

觀察

由於哈米爾圈要通過圖上的所有點, 所以每個點至少要碰到兩個邊 ; 因此 (1) 如果有度數爲 2 的點, 則與該點相接 的兩邊就毫無疑問是圈上的兩邊, 於是保留這些邊, 再繼續看需要那些邊 ; 此時 (2) 所加入的邊不能和已經有的邊形成一個所有點 不到全部的"小"圈, 同時 (3) 一但一個點的附近已經確定有兩邊是必要的邊, 則其餘的邊都可以刪去。

以上的 (1) , (2) , (3) 成爲是判斷一個圖它不含哈米爾頓圈的一個簡單方法, 不過當每個點的度數都不小時, 要用上述法仍有相當大的難度。

例1. 判斷下圖是否具有哈米爾頓圈。(**作業**7.)

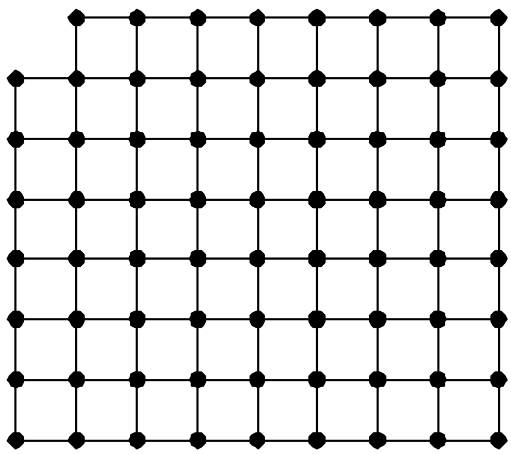


圖 9

接下來, 我們探討什麼樣的圖會有哈米爾頓圈, 直覺上, 如果圖中的每一個點度數都不小, 則出現哈米爾頓圈的 機會就比較大 ; 所以, 在 1952 Dirac 即證明了以下的定理。

定理 3.1. 當 $p \geq 3$ 時, 一個 p 點的簡單圖中, 如果每個點的度數至少爲 $p/2$, 則這個圖中有哈米爾頓圈。

這個結果在數年後被 Ore 的定理所涵蓋 , 在這裡就對 Ore 的結果作一簡要的証明。

定理 3.2. (Ore , 1960)

在一個 p 點的簡單圖 G 中, $p \geq 3$, 如果對於不相連的任意兩點 u 與 v $deg_G(u) + deg_G(v) \geq p$, 則 G 爲哈米爾頓圖。

證明.

假設定理不對。則一定存在一個極大的非哈米爾頓圖 G , 它滿足 G 中不相連的任意兩點之度數和至少爲 $|V(G)|$, 同時, 只要加入任一邊 uv , 則 $G + uv$ 爲哈米爾頓圖。於是 G 中必存在一個 $u - v$ 路徑 它通過所有的點 : $u = v_1,\ v_2,\ \dots\ ,\ v_p = v$ 現在考慮與 u 相連的點集合 $N_G(v_1)$; 如果 $v_i \in N_G(v_1)$, 則 v_{i-1} 必然不與 v_p 相連, 否則 $(v_1,\ v_2,\ \dots\ ,\ v_{i-1},\ v_p,\ v_{p-1},\ \dots\ ,\ v_i,\ v_1)$ 爲 G 的一個哈米爾頓圖, 與假設矛盾。但是, 因爲當 $deg(v_1)$ 爲 t 時, 則 $deg(v_p) \leq (p-1) - t$, 所以 $deg_G(v_1) + deg_G(v_p) = deg_G(v_u) + deg_G(v_v) < p$, 這

又與假設矛盾, 所以定理得證。 ■

這種考慮不相鄰兩點度數和的概念, 後來又被 Bondy 與 Chvatal 發揚光大成爲另一形式的定理。首先, 他們 看了以下的現象。

定理 3.3. 令 u 與 v 爲 G 中的兩個, 它們不相鄰而且度數和不小於 $|V(G)|$ 。則 $G+uv$ 爲哈米爾頓圖的充要條件 是 G 爲哈米爾頓圖。

證明.
$(\Leftarrow)$

顯然對。

$(\Rightarrow)$

如果 G 不是哈米爾頓圖, 而且加進 uv 就是, 那麼, 同上證明必然得到矛盾, 所以定理得證。 ■

有了這樣的概念, 他們更進一步引進圖的閉集 (Closure) 這個概念。

定義 3.4. (Graph Closure)

一個 G 它的閉集 $C(G)$, 爲 G 的一個超圖, 它是經由不斷地加入不相鄰兩點 u , v 所形成的邊所形成, 只要這兩點的度數和不小 於 $|V(G)|$ 。

例2.

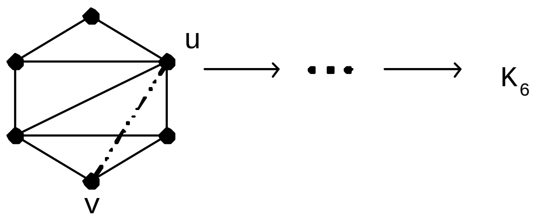


圖 10

值得一提的是上述 $C(G)$ 的定義是好的 (well-defined) , 它不會造成由一個 G 而造出來不同構的 G_1 與 G_2 。再加上定理3.3 , 我們知道。

定理 3.5. G 是哈米爾頓圖若且唯若 $C(G)$ 爲哈米爾頓圖。

作業8.：證明 $C(G)$ 的唯一性。

另外, 由圖 10, 我們發現到最左圖的閉集是完全圖, 而完全圖顯然是哈米爾頓圖, 於是以下的引理就順理成章成爲哈米爾頓圖存在的充分條件之一。

引理 3.6. 令 G 爲一個至少 3 點的圖, 則當 $C(G)$ 爲完全圖時, G 爲哈爾米頓圖。

這個引理最自然的應用是定理 3.2, 因爲那種圖的閉集是完全圖, 同時它也含蓋了幾乎所有在那時代所提出的充分條件 ; 再一次, 我們發現 正確的概念所產生的效力有多大。但是不可否認的是定理 3.2 提供了一個相當漂亮的證明技巧。以下, 我們再針對度數的計算提出一個不一樣 的充分條件。

定理 3.7. (Posa , 1962)

在一個具有 p (≥ 3) 點的圖 G 中, 如果對於所有的 $1 \leq j \leq p/2$, 度數不超過 j 的點數小於 j , 則 G 爲 一個哈米爾頓圖。

證明.

假設 G 爲滿足已知條件, 但是邊數最多的一個非哈米爾頓圖。顯然, G 不是完全圖 ; 令 $V(G) = \{v_1,\ v_2,\ \ldots\ ,\ v_p\}$, 且 v_1 與 v_p 爲不相鄰的點對中 $deg_G(v_1) + deg_G(v_p)$ 爲最大的兩點, 同時令 $deg(v_1) \leq deg(v_p)$ 。

由於 $G\ +\ v_1v_p$ 是哈米爾頓圖, 所以同定理3.2 的概念, $deg_G(v_1)\ +\ deg_G(v_p) \leq p-1$, 因此 $deg_G(v_1) \leq \frac{p-1}{2}$ 。最後, 我們再觀察不和 v_p 相鄰點 u 的度數。(這種點至少有 $deg_G(v_1)$ 個) 因爲 $deg_G(v_1)+deg_G(v_p)$ 是最大值, 所以 $deg_G(u)+deg_G(v_p) \leq deg_G(v_1)+deg_G(v_p)$, 亦即 $deg_G(u) \leq deg_G(v_1)$ 。所以, 度數 不超過 $deg_G(v_1)$ 的點至少有 $deg_G(v_1)$ 個, 這與假設矛盾 ; 定理得證。 ■

與度數相關的充要條件還有一些, 以下僅列出結果, 證明省略。

定理 3.8. (Dirac)

令 G 爲一個圖, 去掉 G 中的任意點都不會使 G 成爲不連通圖 (2−連通圖) 。如果 G 的最小度數是 d , 則 G 中必定含有 一個長度不小於 $2d$ 的圈。

推論 3.9. (Nash-Williams)
點數爲 $2r+1$ 的 r-正則圖必爲哈米爾頓圖。

定理 3.10. (Jackson)
點數不超過 $3r$ 的 2-連通 r-正則圖必爲哈米爾頓圖。

除了用度數的關係來判斷哈米爾頓圖的存在性, 以下再介紹一個不一樣的充分條件。首先, 我們需要兩個定義。

定義 3.11. (連通數 , Connectivity)
一個圖 G 的連通數 $\kappa(G) = min\{|S||S \subseteq V(G)$ 且 $G - S$ 爲不連通圖$\}$ 。

定義 3.12. (獨立數 , Independence Number)
一個圖 G 的獨立數 $\beta(G) = max\{|S||S$ 爲 G 中彼此不相鄰的點集合$\}$ 。

定理 3.13. (Chvatal 與 Erdös)
令 G 爲至少三點的圖且滿足 $\kappa(G) \geq \beta(G)$, 則 G 爲哈米爾頓圖。

證明.
當 $\beta(G) = 1$ 時, G 爲完全圖, 定理顯然成立。現在假設 $\beta(G) \geq 2$, 於是 $\kappa(G) \geq 2$, G 中必含一圈。假設 C 爲長度最大的圈而且 C 並沒有通過全部的點。(不然已得證) 。令 H 爲 $G-C$ 中的一個部分, 而且$v_1,\ v_2, ...,\ v_k \in V(C)$ 和 H 中的點有邊相連。這時候 $\{v_1,\ v_2,\ ...\ ,\ v_k\}$ 中的點沒有兩個會是 C 相鄰的點 ; 因爲, 如此一來, 我們就可以找 到一個更大的圈。再考慮在 C 中接在 v_i 後面的點 w_i , 顯然 w_i 也不能和 H 中的點相鄰 (?) , 同時 $\{w_1,\ w_2, ...,\ w_k\}$ 爲 一個彼此不相鄰的點集合。否則, 假設 $w_i \sim_G w_j$, 現在 $(C \setminus \{v_iw_i,\ v_jw_j\})\bigcup(v_i \sim H \sim v_j \text{ path })\bigcup\{w_iw_j\}$ (圖11) , 則得到一個更大的圈。不但如此, 令 h 爲 H 中的任一點, $\{h,\ w_1,\ w_2,\ ...\ ,\ w_k\}$ 也是一個獨立集。這表示 $\beta(G) \geq k+1$ 。但是 $G - \{v_1,\ v_2,\ ...\ ,\ v_k\}$ 爲不連通, 所以$\kappa(G) \leq k$, 這與假設矛盾。因此 C 應該通過 G 中的全部點, 定理得證。 ■

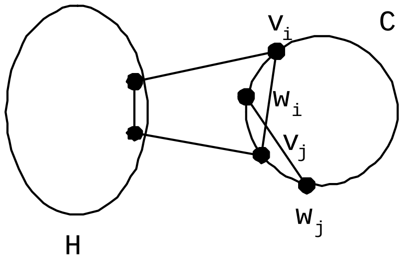


圖 11

這一節的最後, 我們再來看一種近期發展出來的鄰域關系。基本上是考慮不相鄰兩點它們鄰域的交集。

定理 3.14. (Faudree , Gould , Jacobson 和 Schelp)

令 G 爲一個去掉任何點仍維持連通 (2-連通) 的圖。如果對於 G 中不相鄰的任何兩點 u 與 v 都滿足 $|N_G(u)\bigcup N_G(v)| \geq \frac{2(|V(G)-1|)}{3}$, 則 G 爲哈米爾頓圖。

證明.

請參考 JCT (B) 47, 1989, pp. 1-9. ■

這個結果是相當好 (Sharp) 的結果, $3K_n \vee K_2$ 就是一個非常接近這條件 (差一點) 的圖, 但是它不是一個哈米爾頓圖。不過, 沒多久上述定理被推廣到 n-連通圖 ($\kappa(G) \geq n$) 。

定理 3.15. (Fraisse , JGT 10 (1986) , pp. 405-409.)

假如 G 是一個 n-連通圖, 同時對於 G 中的任一個點數 t ($\leq n$) 的獨立集 S , 皆滿足 $|N(S)| \geq t(|V(G)|-1)/(t+1)$ 成立, 則 G 爲哈米爾頓圖。

定理 3.16. (Lindquester , JGT 13 (1989) , pp. 335-352.)

假如 G 是一個 2-連通圖, 同時對於 G 中距離爲 2 的兩點 u 與 v , $|N_G(u)\bigcup N_G(v)| \geq 2(|V(G)|-1)/3$ 成立, 則 G 爲哈米爾頓圖。

受到距離爲 2 點的關係後來相繼有些大陸學者提供出更理想的充分條件, 在此不多敘述 ; 不過在定理 3.16 之前已經有一個好結果談及距離 2 點的條件。

定理 3.17. (Fan , G.H. , JCT(B) 37 , pp. 221-227.)

假如 G 是一個 2-連通圖同時滿足對於所有距離為 2 的兩點 u 與 v , $max\{deg_G(u), deg_G(v)\} \geq |V(G)|/2$, 則 G 為一哈米爾頓圖。

上述所提及 n-連通圖, 我們在下一章再詳細介紹它們的性質。

作業9. ：對於本節所提出之充分條件, 各舉一例說明, 並非所有的哈米爾頓圖都需要滿足該條件。

4. 哈米爾頓圖的相關問題

首先我們介紹圖的次方。

定義 4.1. (Power of Graphs)

$G^k = (V, E)$ 其中 $V = V(G)$, E 爲在 G 中所有距離不大於 k 的點對所成的集合。

例如: 直徑爲2 的圖 G , G^2 即爲完全圖。

在圖論中, 以下的定理最早是分別由 Plum 及 Nash-William 所獨立猜測的結果。

定理 4.2. (Fleischner , JCT(B) 16 , 1974 , pp. 29-34.)

假如 G 是一個 2-連通圖, 則 G^2 爲哈米爾頓圖。

證明. : (**作業**10. ($\star$))

上面的定理後來有了較簡單的證明, 也許你也可以試試看。這個定理用途不少, 以下的結果是由 Thomassen 所提供。

定理 4.3. 令 G 爲一個至少三點的圖, 則 G^2 與 $\overline{G}^2$ 兩者之一必有一個是哈米爾頓圖。

證明.

如果 G 是 2-連通圖, 則由定理 4.2, G^2 是哈米爾頓圖, 定理得証。而當 G 爲不連通圖時, $(\overline{G})^2 = K_{|V(G)|}$ ($\overline{G}$ 的直徑爲2) , 也沒有困難 ; 所以, 最後考慮當 G 與 $\overline{G}$ 都是連通圖而且 G 中有一切點 (Cut-Vertex) 。令 v 爲 G 的切點, 於是 $(\overline{G})^2 - v = K_{|V(G)|-1}$, 現在, $(\overline{G})^2$ 中 v 的度數至少爲 2, 所以 $\overline{G}^2$ 爲 哈米爾頓圖, 定理得証。 ■

實際上, 定理 4.2 可以獲得進一步的修飾。

定理 4.4. (Sekanina , 1960)

如果 G 爲至少 3 點的連通圖, 則 G^3 爲哈米爾頓圖。

證明. (省略) 。

除了看次序, 我們也可以考慮多重邊圖。

定義 4.5. $L^n(G) = L^{n-1}(L(G))$, $n \geq 2$ 。

定理 4.6. (Chartrand 及 Wall , 1973)
如果 G 爲滿足 $\delta(G) \geq 3$ 的連通圖, 則 $L^2(G)$ 爲哈米爾頓圖。

證明.
由於 $\delta(G) \geq 3$, 所以在 $L(G)$ 中的任一邊都會落在某一個三角形上, 所以 $L(G)$ 爲 2-連通圖, 同時 $L(G)$ 中的每一個點 度數至少是 4。因此我們可以在 $L(G)$ 中找到一個經過所有點的封閉步徑 (?) , 令這個步徑爲 T : e_1, e_2, ... , e_n , e_1 對應於 $L(L(G))$ 而言, 這個封閉步徑可以對應出一個圈, 然而它不一定會通過 $L^2(G)$ 的所有點。以下是直接找一個 $L^2(G)$ 的 哈米爾頓圈的方法。先看 $e_1 = v_1v_2$, 考慮與 v_2 相鄰但是沒有被選到 T 中的邊。現在將這些邊逐一加入 (在 $L^2(G)$ 中, 這些邊形成一個完全子圖) ; 然後再看 $e_2 = v_2v_3$, ... 。這個步驟最後可以把 $L(G)$ 中的邊都放入 T 中, 對應於 $L^2(G)$ 這個圖, 這是一個哈米爾頓圈。

推論 4.7. (Chartrand)
只要 G 不是路徑的連通圖, 必定存在一個自然數 n , 使得 $L^n(G)$ 爲一哈米爾頓圖。(**作業**11.)

在邊圖與哈米爾頓圖的關係上, 以下的猜測應該是最著名的一個。

猜測 4.8. (Thomassen)
假如 $L(G)$ 是 4-連通, 則 $L(G)$ 必然是哈米爾頓圖。

作業12. : 如果 G 和 H 都是哈米爾頓圖, 則 $G \times H$ 一定是哈米爾頓圖嗎? (解釋你的答案)

作業13. : 證明 Q_n (n-cube) 爲一哈米爾頓圖。

5. 哈米爾頓圈的聯集

在這一節我們探論一個圖在什麼情況下具有兩個或兩個以上沒有共用邊的哈米爾頓圈。

定理 5.1. 在 K_p 中存在 $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ 個邊互斥 (Edge-Disjoint) 的哈米爾頓圈。

證明.

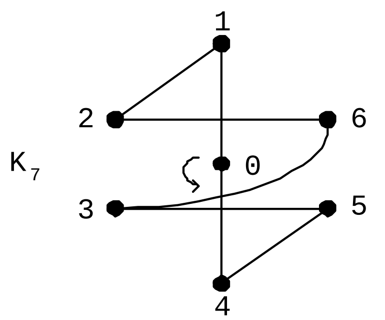
令 $V(K_p) = \mathbb{Z}_p$, 則 $(0,\ 1,\ 2,\ p-1,\ 3,\ p-2,\ 4,\ p-3,\ \ldots,\ \lceil \frac{p+1}{2} \rceil)$ 爲一哈米爾頓圈。接著令 $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor - 1,$ $(0,\ 1+i,\ 2+i,\ p-1+i,\ p-2+i,\ 3+i,\ \ldots,\ \lceil \frac{p+1}{2} \rceil + i) \pmod p$ 也都是哈米爾頓圈, 定理得証。 ■

定理 5.2. 在 $K_{p,p}$ 中存在 $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 個邊互斥的哈米爾頓圈。

證明.

令 $V(K_{p,p}) = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_2$, 則 $C^{(1)} = ((0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (2,1),\ \ldots,\ (p-1,0),\ (p-1,1))$ 爲 一哈米爾頓圈。令 $C^i = ((0,0),\ (2(i-1)+1,1),\ (1,0),\ (2(i-1)+2,1),\ (2,0),\ (2(i-1)+3,1),\ (3,0),\ \ldots,\ (p-1,0),\ (2(i-1),1)) \pmod p$, $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ 。 ■

爲了容易了解上述兩個定理, 以下分別 $p = 7$ 爲例, 畫圖說明。



$K_{7,7}$

1	1	2	2	3	3	0
0	1	1	2	2	3	3
3	0	1	1	2	2	3
3	3	0	1	1	2	2
2	3	3	0	1	1	2
2	2	3	3	0	1	1
1	2	2	3	3	0	1

(i,j) 位置代表邊 $(i,0) \sim (j,1)$

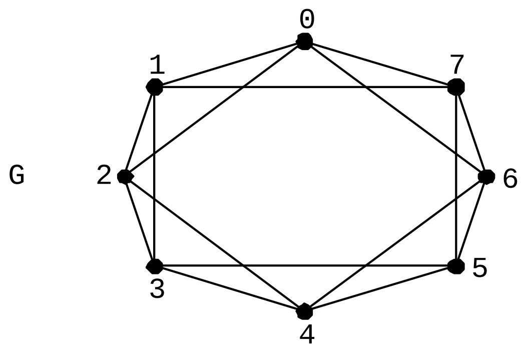
由於判斷是否存在一個哈米爾頓圈已經是非常困難的工作, 想要決定一個圖在什麼情況下會有多個邊互斥的哈米爾頓圈就更不容易了, 甚至想要 知道有沒有兩個不一樣的哈米爾頓圈都不是一件容易的事。

猜測. 若是在一個4-正則圖中存在一個哈米爾頓圈, 則必存在另一個不一樣的哈米爾頓圈。

以下介紹的概念提供這個猜測的正面性。

令 G 爲一圖, 它的點集合爲 $\mathbb{Z}_n$, 而它的邊集合, 則爲由兩點 (數) 的循環距離 (Cyclic Distance) 爲 1 或 2 的邊所形 成的集合。(G 也可以用 C_n^2 表示。)

例.

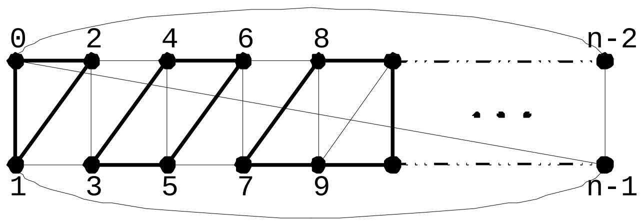


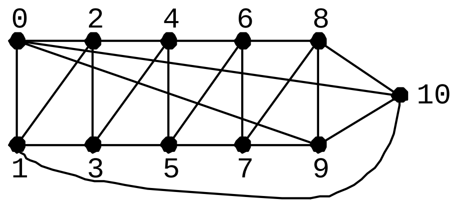
我們不難發現在例子中, G 可以寫成一個哈米爾頓圈及兩個 4-圈的聯集, 同時也可以寫成 $C_6 \bigcup C_5 \bigcup C_3$ 及 $C_8 \bigcup C_8$ (?) 。因此以下的定理就不會太難想像。

定理 5.3. C_n^2 可以寫成一個哈米爾頓圈及一個懸掛 2-正則圖 H 的聯集, 其中 H 中的圈, 邊數可以預先指定。($n \geq 5$)

證明.

首先把點分成兩組, 如下圖。(先考慮 n 爲偶數的情況。) 我們依次把 H 所指定的圈先選出來, 如圖中顯示 3, 4, 5, ... , 於是 剩下的部份也是 2-正則圖, 由於它保持連通性, 所以是一個哈米爾頓圈。至於 n 是奇數時, 証明法相似。 ■





前面介紹的 Cyclic Distance , 在組合設計 (Combinatorial Design) 的研究中通常以差值 (Difference) 的形式出現。

定義 5.4. 在以 $\mathbb{Z}_n$ 為點集的圖中, i 與 j 的差值 (difference) 定義為 $d(i,j) = min\{|j-i|,\ n-|j-i|\}$ 。所有以 $D \subseteq \{1,\ 2,\ ...\ ,\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ 的元素為差值的邊所生成的圖以 $G[D]$ 表示。

例.

$G[\{1,2\}] = G[1,2] = C_n^2$, $G[\{1,\ 2,\ ...\ ,\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}] = G[1,\ 2,\ ...\ ,\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor] = K_n$ 。

以下是幾個有關差值的特性。((k,n) 代表 k 與 n 的 g.c.d.)

定理 5.5. 當 $(k,n) = 1$ 時, $G[k]$ 為一哈米爾頓圈。

定理 5.6. 當 $(k,n) = d$ 時, 則 $G[k]$ 是 d 個長度為 n/d 的圈所成的聯集。

定理 5.7. 當 $1 \leq k_1 < k_2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 而且 $(n,k_1,k_2) = 1$ 的時候, $G[k_1,k_2]$ 可以表示成兩個 邊互斥哈米爾頓圈的聯集。

證明. (**作業**14.)

作業15. 令 $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 。証明 C_n^k 可以分割成 k 個哈米爾頓圈。

作業16*. 証明 $K_{m(n)}$ 可以分割成哈米爾頓圈的充要條件為每個點皆為偶點。

6. 推銷員問題 (Traveling Salesman Problem)

在哈米爾頓圖方面, 最有名的應用問題非推銷員問題莫屬。它是要找一個最便宜的旅行方式, 到過他計劃前往的每一個城市之後, 再回到 原處 ; 由於安排旅行行程的不同, 所花費的經費自然會有所不同, 更何況所使用時間也會不一樣, 以下, 我們用加權圖的方式來表示推銷 員所要訪問的城市, 以及城市與城市之間旅行所需要的費用 ; 目標是要找到一個哈米爾頓圈來作爲他旅行的過程, 而在圖上的加權總和 則爲研究的對象, 越小越好。

由於討論的城市都是要拜訪的城市, 所以加權圖的底圖 (Background graph) 可以讓它是一個完全圖 ; 我們同時假設 (i) 如果城市甲與城市乙 無路可通, 則費用加權爲 $+\infty$, (ii) 由甲到乙所需費用等於由乙到甲的費用。

這個問題, 以下簡稱 TSP , 最早在 1943 年時由 Whitney 首先提出來它的重要性在 OR 中 (Operation Research) 不斷地被提出來, 直到 1954 年, Dontzing , Fulkerson 及 Johnson 有了突破, 它們對於美國的 49 個重要的城市提供了一個幾近完美的答案, 他們不但用到了 圖論的觀念, 也用到了線性規劃中整數規劃 (Integer Programming) , 最主要的兩個工具是 Branch−and−Bound 及 Cutting Planes 。到了 1980 年, Crowder 及 Padborg 有了更重大的突破, 他們找到了接近最佳答案的 318 個城市, 一共花了 6 分鐘而已。至於苦力式 地把所有可能的路線都比較過一次的方法, 就是每秒鐘能做 10 億次, 至少也要花上 10^{639} 年哩!這兩位學者候貢獻令人欽佩, 他 們除了上述提及的 Branch−and−Bound 之外, 又用到了 Facet-defining Inequalities 。

這一節中, 主要介紹幾個不錯的演算法, 以時間, 花費力氣的考慮, 它們都是"相當好"的方法。

我們已經知道 TSP 是一個 NP-hard 的問題, 所以要找到一個最好 (Optimal) 的答案絕非易事, 尤其是在點數很多的時候, 更是困難。因此, 對於由一個城市到下一個城市應該如何選擇, 就要發揮研究者的想像力了。一般而言, 從比較可能的幾個選擇找一個城市然後繼續下 去是勢在必行, 也許不見得會得到答案 (最好的) , 但是, 希望如此選擇可以達到相當好的效果。這一類在幾個比較可能的情況下繼續選擇 一個做下去的方法一般稱爲是

啓發式的演算法 (Heuristic Algorithm) 。這種演算法可能求不出最優解, 但是, 肯定可以在比較短的時間 內選到一個"不錯"的答案。以下就提供三個這種類型的算法, 細節的討論在此省略。

演算法 A : (**最近鄰居法** , Nearest Neighbor)

選擇最近但是尚未去過的城市。

演算法 B : (**兩倍樹法** , Double Tree)

(1) 先求最小的懸掛樹 (Minimum Spanning Tree , MST) 。

(2) 把上述得到的樹擴大一倍 (邊畫兩次) 。

(3) 利用圖中的尤拉迴路再加上找捷徑的概念求得哈米爾頓圈 (參考圖 12) 。
(即跳過尤拉迴路已經通過的城市。)

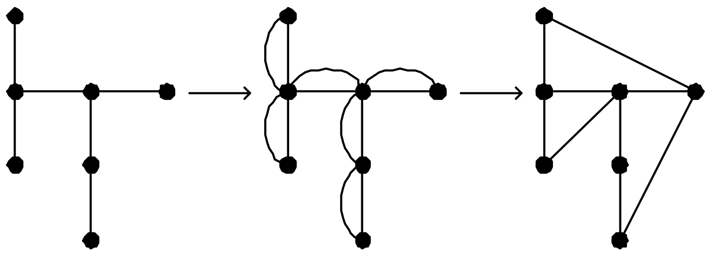


圖 12 : 倍數法

演算法 C : (**樹與配對** , Tree and Matching)

(1) 找一個 MST , T 。

(2) 找出由上述 MST 的奇點所導出的子圖 H 。

(3) 在 H 中找到一個完全配對 M 它的加權總和爲最小。

(4) 把 M 的邊加到 T 上, 於是得到 T^* 。

(5) 利用 T^* 中的尤拉迴路找到哈米爾頓圖。

TSP 的變化形式有很多, 包括找到最短的哈米爾頓路徑 (通過全部點的路徑) , 迴路設計, 行車路線安排, 工作安排, ... 等, 都是同類型的問題, 這也更凸顯這個問題在應用領域上的實用價值。

作業17. ：對於上述的三個演算法各找出一個例子來說明它們可能得到很不好的答案。
作業18. ：試求在一個 10 點的完全圖中不同的哈米爾頓圈 (兩圈至少有一邊不一樣) 。