三. 計數 (Pólya Counting)

1. 等價類 (Equivalence classes)

在圖 1.1 中 (四個格子的正方形) 每個格子可以選擇塗黑或是不塗黑, 方法有 16 種 。如果我們把經過旋轉後會是一樣的型式當成"相同" , 則不相同型式只有 6 種 C_1;C_2,C_3,C_4,C_5;C_6,C_7,C_8,C_9;C_{10}, C_{11};C_{12},C_{13},C_{14},C_{15};C_{16} 。更進一步 , 加上黑白可以互換的條件之後 , 不相同的型式就剩下 4 種而已, 因爲 C_1 和 C_{16} , C_2 和 C_{12} 算是相同 。由此我們可以發現 , 經過不同的規定 , 所得到的 "相同" 型式之個數也隨著改變 。這些規定即爲所謂的等價關係 (Equivalence Relation) 。

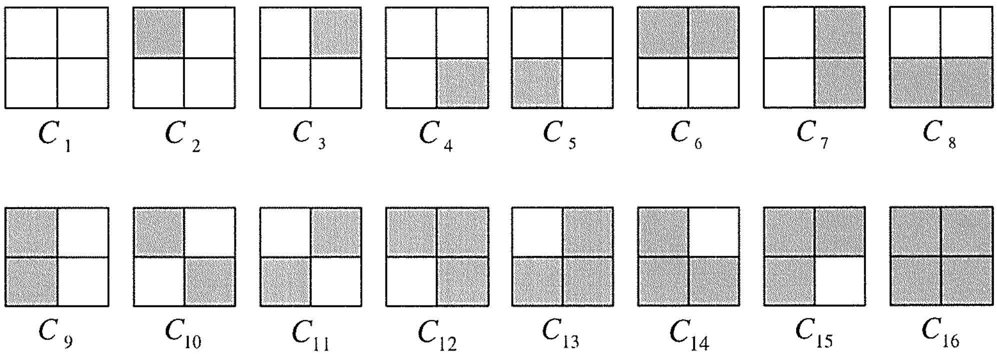


圖 1.1

假設 S 和 T 爲兩個非空的集合 , 如果 $\sim$ 爲 $S\times T$ 的子集合 , 我們稱 "$\sim$" 爲集合 S 和 T 的一個二元關係 。舉例來說 , 令 $S=\{1,2,3\}$, $T=\{a,b,c,d\}$, 則 $\sim=\{(1,a),(1,c),(2,b),(2,c),(3,b),(3,d)\}$ 爲一二元關係 。在 $S=T$ 的情況下 , 我們稱 $\sim$ 爲 S 的一個二元關係 。爲了方便表示 , 如果 $(a,b)\in\sim$, 我們有用 $a\sim b$ 來表示 。這裡要注意 $a\sim b$ 不一定能得到 $b\sim a$ 。也就是 (a,b) 和 (b,a) 不一定要同時在 $\sim$ 中 。下面我們定義一種特殊關係 。

定義 1.1. 我們稱 $\sim$ 爲 S 的一個等價關係 (Equivalence Relation) , 如果 $\sim$ 爲 S 的一個二元關係 , 同時滿足下列三個條件 :

(i) 反身性：對於所有的元素 $a \in S$，$a \sim a$。

(ii) 對稱性：對於任意兩個在 S 的元素 a 和 b，如果 $a \sim b$ 則 $b \sim a$。

(iii) 遞移性：對於任意三個在 S 的元素 a,b 和 c，若 $a \sim b$ 且 $b \sim c$，則 $a \sim c$。

如果利用等價關係把集合 S 中的元素分類，即當 $a \sim b$ 時，a,b 在同一類，則我們可以把集合 S 分成互斥的子集合，每個子集合爲一個等價類 (Equivalence class)。

定理 1.2. 假設 $\sim$ 爲集合 S 的一個等價關係，則 S 可以被分割成等價類。

證明. 在 S 中先任取一個元素 a，定義 $S_a = \{x | a \sim x, x \in S\}$；因爲當 $y, z \in S_a$ 時，則 $a \sim y$，$a \sim z$；因此 $y \sim a$，$a \sim z$，所以 $y \sim z$。如果 $S_a = S$，則 S 中只有一個等價類；不然令 $b \in S/S_a$，同理定義 $S_b, S_c, \cdots$。接下來我們證明任意兩個不同的等價類必定互斥。假設 $S_a \cap S_b \neq \phi$ 則令 $d \in S_a \cap S_b$，因此 $a \sim d$ 且 $b \sim d$，所以 $a \sim b$，此爲矛盾。因此定理得證。 ■

定義 1.3. S 上的一個二元運算 "$*$"，爲由 $S \times S$ 映至 S 的一個函數。

定義 1.4. (群 ,Group)

一個集合 S 及在 S 上的一個二元運算 $*$ 稱爲是一個群，如果下列三個條件滿足：

(i) 結合律，即對於 S 中任意三個元素 a,b,c，$a*(b*c) = (a*b)*c$。

(ii) 有單位元素，即存在有一個元素 e，使得對於 S 中任意元素 a，$a*e = e*a = a$。

(iii) 有反元素，即對於 S 中任意元素 a，都可以找到一個元素 $a^{-1} \in S$，使得 $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$。

(註) 定義中的單位元素及反元素都是唯一的。

定義 1.5. (排列 ,Permutation)

一個集合 S 的排列爲一個由 S 映至 S 的一對一，映成函數。

定義 1.6. (排列群 ,Permutation Group)

由一個集合 S 的一些排列及合成運算所形成的群，稱爲是 S 的排列群。

例. 令 $S=\{1,2,3\}$，則 $G=\left\{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}\right\}$ 爲一排列群。

(如果運算不會被弄錯，就可以不必再提是什麼樣的運算。)

令 $S=\{1,2,3,4\}$，$G\{e,(12),(34),(12)(34)\}$ 則 G 爲一排列群。

(註) 這裡的 $(12)(34)$ 代表 $\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$。

我們可以用排列群來導出 S 的一個二元關係 (Induced Binary Relation)。假設 G 爲 S 上的一個排列群，令 $a\sim b$，若且唯若存在一個 G 中的排列 π，使得 $\pi(a)=b$ (或是 $a_\pi=b$)。我們可以得到下面的結果。

定理 1.7. 由排列群所導出的二元關係爲一個等價關係。

證明. 令 G 爲集合 S 上的一個排列群，由於 G 中有單位元素 e，所以對於 S 中的任一元素 a，$e(a)=a$，因此 $a\sim a$。接下來，如果 $a\sim b$，即有一 G 中的元素 π 使得 $\pi(a)=b$，於是 $\pi^{-1}(\pi(a))=\pi^{-1}(b)$，$\pi^{-1}(b)=a$。因爲 π^{-1} 在 G 中，所以 $b\sim a$。最後，假設 $a\sim b$ 且 $b\sim c$，於是，存在有 $\pi_1,\pi_2\in G$，使得 $\pi_1(a)=b$，$\pi_2(b)=c$。利用合成關係，$\pi_2(\pi_1(a))=c$，即 $(\pi_2\circ\pi_1)(a)=c$, 因此 $a\sim c$，所以定理得證。 ■

由於排列群可以導出等價關係，我們就可以計算等價類的個數，以下是前面所提到的例子。(圖 1.1) 假如我們定義 4 個排列如下：

$\pi_1=(C_2C_3C_4C_5)\,(C_6C_7C_8C_9)\,(C_{10}C_{11})\,(C_{12}C_{13}C_{14}C_{15})$ (順時針轉 $90°$)

$\pi_2=(C_2C_4)\,(C_3C_5)\,(C_6C_8)\,(C_7C_9)\,(C_{12}C_{14})\,(C_{13}C_{15})$ (順時針轉 $180°$)

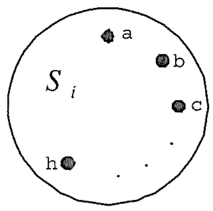
π_3：順時針轉 $270°$，π_4 不轉。

則我們可以求出 6 個等價類，基本上每一類中的正方形圖樣和其它類的圖樣是無法用旋轉來使它們成爲相同的圖樣。這 6 個等價類分別爲 $\{C_1\}$，$\{C_2,C_3,C_4,C_5\}$，$\{C_6,C_7,C_8,C_9\}$，$\{C_{10},C_{11}\}$，$\{C_{12},C_{13},C_{14},C_{15}\}$，$\{C_{16}\}$。現在我們來觀察在同一個等價類中，元素之間的關係。譬如在 $\{C_{10},C_{11}\}$ 這個集合中，究竟有多少個 G 中的排列會把 C_{10} 對應到 C_{11} 呢？假設 π_x 爲其中一個，則對於所有的 $\pi_i\in G$，$\pi_i(C_{10})=C_{10}$，$(\pi_x\circ\pi_i)$ 也是這樣的排列, 所以在 G 中能把 C_{10} 對應到 C_{11} 的排列數，至少爲把 C_{10} 固定的排列數。(?) 是否還令更多呢？假設 π_y 爲另一個這種排列，且 $\pi_y(a)=b$, $a=C_{10}$, $b=C_{11}$, 所以 $(\pi_x^{-1}\circ\pi_y)(a)=a$，於是 $(\pi_x^{-1}\circ\pi_y)$ 固定 a，且 $\pi_x\circ(\pi_x^{-1}\circ\pi_y)=\pi_y$, 因此 π_y 必爲上述的形式。也就是說不會有更多了。現在，我們假設 G 爲

S 上的一個排列群，對於 S 中的任意元素，$\eta(a)$ 代表在 G 的元素中，可以把 a 對應到 a 的排列數。則下面的定理就可以成立。

定理 1.8. 令 G 爲 S 上的一個排列群，則用 G 所導出的等價關係可以把 S 分成 $\frac{\sum_{s\in S}\eta(s)}{|G|}$ 個等價類。

證明. 假設 a, b 爲同一等價類 S_i 中之元素，a 可能等於 b，由上面的說明，我們求得 G 中能把 a 對應到 b 的排列恰有 $\eta(a)$ 個，由於 $\eta(a)$ 這個量獨立於 b，所以 $\eta(a)\cdot|S_i| = |G|$ (?)，



$$\begin{array}{l} a \longrightarrow a \\ \left\{\begin{array}{l} a \longrightarrow a \\ a \longrightarrow b \\ a \longrightarrow c \\ \quad\vdots \\ a \longrightarrow h \end{array}\right. \end{array}$$

$|S_i| = h \qquad \eta(a)\cdot|S_i| = |G|$

又 $\eta(a) = \eta(b)$，所以 $\sum_{s\in S_i}\eta(s) = |G|$。如此一來 $\sum_{s\in S}\eta(s) = \sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{s\in S_i}\eta(s)\right) = t\cdot|G|$，其中 t 爲等價類的個數。因此得證。 ■

利用定理 1.8，我們不難算出上面例子中正方形格子的形式有

$$\frac{1}{4}\Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \eta(C_1)}}{4} + 1 + \cdots + 1 + \underset{\substack{\uparrow\\ \eta(C_{10})}}{2} + \underset{\substack{\uparrow\\ \eta(C_{11})}}{2} + 1 + \cdots + 1 + \underset{\substack{\uparrow\\ \eta(C_{16})}}{4}\Big) = 6$$

但是有些問題，集合 S 太大，如此一一計算 $\eta(a)$ 值比較費力，因此另一形式的公式可供計算。

定理 1.9. $\sum_{s\in S}\eta(s) = \sum_{\pi\in G}\psi(\pi)$，$\psi(\pi) = |\{a\in S|\pi(a) = a\}|$。

證明. 這可以用兩方向的計算來證明。左式和右式都是在計算不變性 $(\pi(x) = x)$ 的總數，左式依元素一一累加，而右式則依排列一一累加，故得證。 ■

有了定理 1.9，等價類的個數就可以依另一式子來計算，這也是聞名的朋塞輔助定理 (Burnside's Lemma)。

定理 1.10. (Burnside)

令 G 爲 S 上的一個排列群，則用 G 所導出的等價關係可以把 S 分成 t 個等價類，$t=\frac{\sum_{\pi\in G}\psi(G)}{|G|}$。

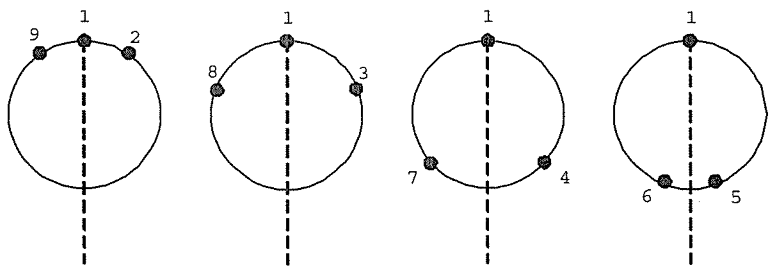
若以正方形格子的著色 (上例)，$t=\frac{\psi(\pi_1)+\psi(\pi_2)+\psi(\pi_3)+\psi(\pi_4)}{|G|}=\frac{2+4+2+16}{4}=6$。由於 G 中的元素較少，計算似乎較容易。接下來再看一個問題。

問題1. 用三顆紅色、六顆藍色寶石所串起來的項鍊，共有多少種不同型式？(轉動或翻面後一樣，即算是相同的型式。)

答. 首先由組合我們得知 $|S|=\binom{9}{3}=84$，接著因爲旋轉與鏡射後的型式和原來的型式看成一樣，所以 G 中的元素爲 $r_1,r_2,\cdots,r_9,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_9$。其中 r_i 爲順時針旋轉 $i\cdot\frac{360^\circ}{9}=(40i)^\circ$，$\delta_j=\begin{pmatrix}\cdots & j-2 & j-1 & j & j+1 & j+2 & \cdots\\ \cdots & j+2 & j+1 & j & j-1 & j-2 & \cdots\end{pmatrix}$ (鏡射)。現在，我們需要計算 $\psi(r_i)$ 及 $\psi(\delta_j)$，$i,j=1,2,\cdots,9$。然後，

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\sum_{i=1}^{9}\psi(r_i)+\sum_{j=1}^{9}\psi(\delta_j)}{18}\\
&= (0+0+3+0+0+3+0+0+84+\underset{\substack{\uparrow\\ \psi(\delta_1)}}{4}+4+4+\cdots+\underset{\substack{\uparrow\\ \psi(\delta_9)}}{4})/18\\
&= \frac{126}{18}=7
\end{aligned}
$$

(**註1.**) $\psi(\delta_1)=4$ 的理由可以由下圖看出。



(**註2.**) 至於是哪七種，我們把它當成作業。

2. 等價函數 (Pólya's Counting Theorem)

前面計算等價類的概念可以作適當的推廣，現在把計算的對象轉換成函數，亦即探討等價的函數。

令 F 代表由 $D=\{a,b,c,d\}$ 映至 $R=\{0,1\}$ 的所有函數所成的集合，$F=R^D$ 於是 $|F|=|R|^{|D|}=2^4=16$。再令 $G=\{e,(abcd),(ac)(bd),(adcb)\}$ 為 D 的一個排列群；於是我們可以定義 F 的一個等價關係：$f_1 \sim f_2$ 若且唯若存在一個 $\pi \in G$，使得 $f_1 = f_2 \circ \pi$。所以，上述的 16 個函數就可以分成數個等價類：如下圖所示

函數值 / 函數	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	$f(d)$
f_1	0	0	0	0
f_2	1	0	0	0
f_3	0	1	0	0
f_4	0	0	1	0
f_5	0	0	0	1
f_6	1	1	0	0
f_7	0	1	1	0
f_8	0	0	1	1
f_9	1	0	0	1
f_{10}	1	0	1	0
f_{11}	0	1	0	1
f_{12}	1	1	1	0
f_{13}	0	1	1	1
f_{14}	1	0	1	1
f_{15}	1	1	0	1
f_{16}	1	1	1	1

a	b
d	c

再來我們介紹函數的加權 (Weight of Function)。首先，對於由 D 對應到 R 的函數 f，定義 R 的儲存算子 (Store Enumerator) φ，與 f 無關，$\varphi_F = \sum_{r\in R} w(r)$，其中 $w(r)$ 為 r 的加權。

(註) 這裡 $w(r)$ 可以是數也可以是符號。

例. $D=\{d_1,d_2,d_3\}$，$R=\{r_1,r_2,r_3\}$，$w(r_1)=u$，$w(r_2)=v$，$w(r_3)=u$，則儲存算子為 $2u+v$。

有了儲存算子，再看函數的加權 $w(f)=\prod\limits_{d\in D} w(f(d))$，於是，不同的函數可能有相同的加權；例如，

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & r_1 & r_2 & r_3 \\ \hline
d_1 & \vee & & \\ \hline
d_2 & & \vee & \\ \hline
d_3 & \vee & & \\ \hline
\end{array}
\quad,\quad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & r_1 & r_2 & r_3 \\ \hline
d_1 & & \vee & \\ \hline
d_2 & \vee & & \\ \hline
d_3 & & & \vee \\ \hline
\end{array}
$$

所代表的兩個函數它們的加權都是 u^2v。

從函數的加權，我們可以看出 D 中元素的分配情形 (f)，例如 u^2v，代表有兩個 u–type，一個 v–type，而當我們有很多個分配放在一起的時候，這些加權的總和就可以反應出整體元素分配的情形。我們為了方便起見，把這些函數的加權之總和以 I_s 代表，其中 S 代表所有一起討論的函數所成的集合。I_s 一般稱為 S 的儲存和 (Inventory)。

接著，我們來看等價關係對上述加權概念的影響。

定理 2.1.（輔助定理）

等價函數的加權值相等。

證明. 由前面定義 $f_1\sim f_2$，若且唯若存在一個排列 $\pi\in G$，滿足 $f_1(d)=f_2(\pi(d))$，$\forall d\in D$。所以，$\prod\limits_{d\in D} w[f_1(d)]=\prod\limits_{d\in D} w[f_2(\pi(d))]$，但是 $\prod\limits_{d\in D} w[f_2(\pi(d))]=\prod\limits_{d\in D} w[f_2(d)]$，所以 $W(f_1)=W(f_2)$。 ■

因此，在同一等價類的函數都具有相等的加權，這個加權也稱為是這個等價類（或型式，Pattern) 的加權。不過，值得一提的是具有相同加權的函數，不一定會來自同一等價類。

例.（函數加權的概念）

有 8 個人，其中 3 個來自一個家庭，另 2 個來自一個家庭；他們準備去拜訪 3 個城市，而且同一家庭的人要一起去，試問不同的訪問方法有多少種？

利用上述的概念，令 $D=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，$R=\{c_1,c_2,c_3\}$，其中 $\{a,b,c\}$，$\{d,e\}$ 分別為兩家庭的成員；同時 c_1,c_2,c_3 的加權分別為 $\alpha,\beta,\gamma,$ 則由 $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha+\beta+\gamma)^3$ (?) 可以求出不同的訪問方式。（很像生成函數的概念，不是嗎？）

要求出函數的等價需要多一些的工具。

在上一節，我們已經發現排列群，或排列子群在計數上所扮演的角色; 同時，如何把一個排列以適當的方式表示出來也很重要。所以，首先介紹圈分解 (Cycle Factorization) 的概念。

例.

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&1&7&3&6&5&8&2\end{pmatrix}=(14753)\circ(29)\circ(6)\circ(8)\text{。}$$

(14753) 代表 $1\to4$，$4\to7$，$7\to5$，$5\to3$，$3\to1$。

定理 2.2. 任一個排列皆有唯一的圈分解。

(註). 沒有共同元素的圈可以交換，這裡的運算 "$\circ$" 爲函數的合成。

定義 2.3. 令 f 爲一集合 X 的排列，$|X|=n$。我們用 $\#(f)$ 代表 f 的圈分解中圈的個數。而 $t(f)$ 則代表一個 $n-$維向量 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，其中 e_i 代表圈的大小爲 i 的個數，$i=1,2,\cdots,n$。

例. 上例中，$\#(f)=4$，$t(f)=(2,1,0,0,1,0,0)$。

爲了計數的方便性，令 $mon(f)=z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$，所以當 G 爲一排列群時，我們可以得到 (根據 $t(f)$) 一個生成函數 $\sum\limits_{f\in G} mon(f)=\sum\limits_{f\in G} z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$。

定義 2.4. (圈指標數，Cycle Index)

一個 n 元集合 X 的排列群 G 的圈指標數爲 $P_G(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\frac{1}{|G|}\sum\limits_{f\in G} z_1^{e_1}z_2^{e_2}\cdots z_n^{e_n}$。

例. $P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_n)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$。

(註) D_4 有 8 個元素，$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_n)$ 說明了這 8 個元素的圈分解形式分別有一個單位元素，兩個 4−圈，三個形爲 $(ab)(cd)$ 的圈，以及兩個形式爲 $(x)(y)(zw)$ 的圈。

現在，我們可以證明 Pólya 定理。

定理 2.5. 令 S 代表所有由 D 映至 R 的函數所成的集合，則 S 中等價類 (對應於 G) 的儲存和 (Inventory) 等於 $P_G(z_1,z_2,\cdots,z_n)$，其中 $z_i=\sum\limits_{r\in R}[w(r)]^i$，$i=1,2,\cdots,n$。

証明. 省略。(有興趣的同學可參考 C. L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics.)

推論 2.6. 由 D 映至 R 的函數之等價類 (對應於 G) 等於 $P_G(|R|, |R|, \cdots, |R|)$。

証明. 令 R 中每一個元素的加權都是 1 。 ∎

從上面的推論可以知道：要計算等價類的個數，首先得求出排列群 G, 再利用圈指標數 $P_G(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 以 $|R|$ 代入 z_i , $i = 1, 2, \cdots, n$, 即可求出所要的答案。另外，如果 R 中的元素有不同的加權，還是得利用定理 2.5 。

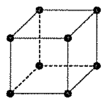
問題2. 利用兩個顏色 x 與 y 來塗一個正四面體的四面，試求不同的著色形式 (等價類) 。

解. $P_G(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{3}(z_1^4 + 2z_1z_3)$ (?) 。

所以方法數爲 $P_G(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{3}(2^4 + 8) = 8$ 。著色方法的所有形式則爲 $\frac{1}{3}\left[(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)\right]$ 。

(註) $z_1 = x + y$, $z_3 = x^3 + y^3$ 。(定理 2.5. w(x)=x , w(y)=y 。)

作業.

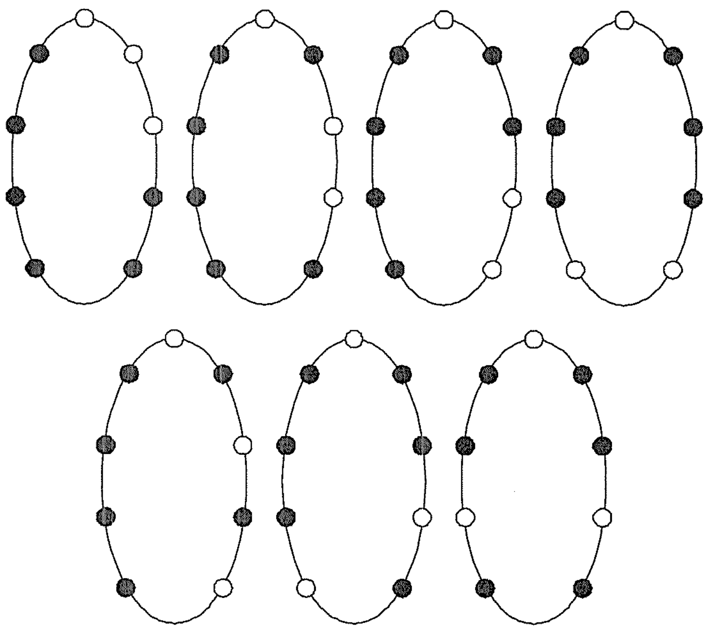
1. 試畫出問題 1 的七個不同型式之項鍊。
2. 如果項鍊型式只考慮旋轉之後相同才算同型，問用紅、黃、藍三種顏色一共 5 個寶石，所串成的項鍊有多少種型式。
3. 試求用 n 個顏色去圖一個正六面體的八角落，  ，用不同的方法 (經各種方向轉動後仍不同) 。

   同時證明 $n^8 + 17n^4 + 6n^2$ 爲 24 的倍數。
4. 如果我們用 6 種顏色來塗正六面體的每一面，而且每面各一種不同顏色，問方法有多少種？

解答.

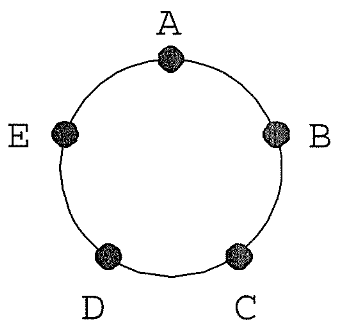
1. 試畫出問題 1 的七個不同型式之項鍊。

答.



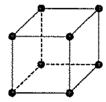
2. 如果項鍊型式只考慮旋轉之後相同才算同型，問用紅、黃、藍三種顏色一共 5 個寶石，所串成的項鍊有多少種型式。

答.



旋轉	$0°$	3^5
	$72°$	3
	$144°$	3
	$216°$	3
	$288°$	3
共 5 種		255

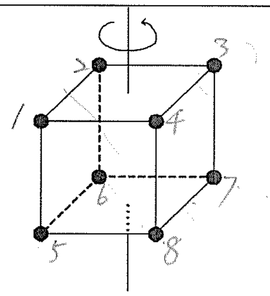
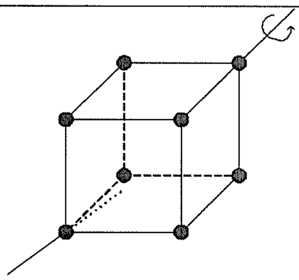
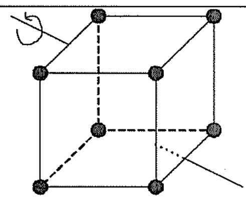
所以 $\frac{255}{5} = 51$

3. 試求用 n 個顏色去圖一個正六面體的八角落，，用不同的方法（經各種方向轉動後仍不同）。

同時證明 $n^8+17n^4+6n^2$ 爲 24 的倍數。

identity z_1^8

答.

	$0°$	n^8	
		n^8	
(1) 	$90°$ $180°$ $270°$	n^2 n^4 n^2	$\times 3$
	9	$3n^4+6n^2$	
(2) 	$120°$ $240°$	n^4 n^4	$\times 4$
	8	$8n^4$	
(3) 	$180°$	n^4	$\times 6$
	6	$6n^4$	
Total	24	$n^8+17n^4+6n^2$	

→ (1234)(5678)

→ (13)(24)(57)(68)

→ (1432)(5876)

(1)(7)(368)(254)

→ (2)(8)(457)(163)

(3)(5)(186)(274)

(4)(6)(257)(183)

> (386)(245)

⋮

6 { (12)(78)(46)(35)

所以 $24|(n^8+17n^4+6n^2)$。

$$P_G(z_1,z_2,\cdots,z_8)$$
$$=3\cdot z_4^2+3\cdot z_2^4+3\times z_4^2+4\times z_1^2z_3^2+4z_1^2z_3^2 \quad //$$
$$+6\times z_2^4+z_1^8\text{(identity)}$$
$$=3n^2+\underline{3n^4}+3n^2+\underline{4n^4+4n^4+6n^4}$$
$$=n^8+17n^4+6n^2$$

(1) $\begin{cases} 90° \longrightarrow (0,0,0,2,0,0,0,0)\times 3 \\ 180° \longrightarrow (0,4,0,0,0,0,0,0)\times 3 \\ 270° \longrightarrow (0,0,0,2,0,0,0,0)\times 3 \end{cases}$

(2) $120° \longrightarrow (2,0,2,0,0,0,0,0)\times 4$

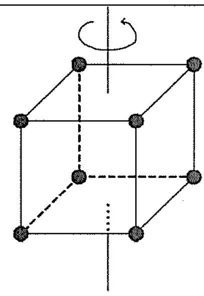
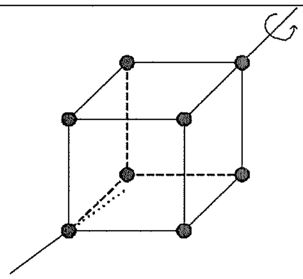
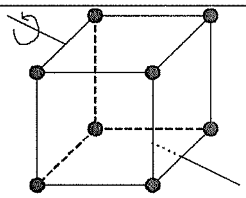
$240° \longrightarrow (2,0,2,0,0,0,0,0)\times 4$

(3) $180° \longrightarrow (0,4,0,0,0,0,0,0)\times 6$

4. 如果我們用 6 種顏色來塗正六面體的每一面，而且每面各一種不同顏色，問方法有多少種？

答.

令六個顏色爲 a, b, c, d, e, f，則

旋轉	0°	$(a+b+c+d+e+f)^6$ (找 abcdef 項的係數)	
因爲每面顏色都不同，所以以下不需考慮			
			
			
			
Total	24		

因爲每面顏色不同，故所有方法數爲 $\frac{6!}{24} = 30$
（另解：先固定一面，則 $1 \times 5 \times (\frac{4!}{4}) = 30$）