離散數學講義 Part 2

4. 遞迴關係（Recurrence Relations）

多年以前，一位印度國王 Shirham，因爲他的宰相 Sissa Ben Dahir 發明了西洋棋，所以他用答應這位智者的一個合理要求做爲獎賞。這位先生提出了下列的請求：他希望國王給他一些米，可以依次放在西洋棋的格子中，第一格放一粒米，第二格爲第一格之兩倍，第三格爲第二格的兩倍，以下類推，一直到最後一格放好就可以了。

首先，我們來看究竟在第 k 格放了多少粒米。令第 k 格放了 t_k 粒米，則我們雖然無法立刻求 t_k，但是當 $k \geq 2$ 時，$t_k = 2t_{k-1}$。這樣的等式顯示出，只要求出 t_{k-1}，t_k 就迎刃而解。用這種方式所表示出來的式子，我們稱之爲遞迴關係，即利用前面答案（可能尚未求出）來求後面的答案。

爲了解決上面的（遞迴關係）問題，我們可以利用反複使用（Iteration）的原理：$t_k = 2t_{k-1} = 2 \cdot 2 \cdot t_{k-2} = \cdots = 2^{k-1} \cdot t_1$，然後代入 $t_1 = 1$ 這個起始值（Initial value(s)），就求出 $t_k = 2^{k-1}$。接著再利用相似的遞迴關係來看看這位智者一共得到多少粒米。令到第 k 格爲止總共得到 s_k 粒米，因此 $s_{k+1} = s_k + t_{k+1} = s_k + 2^k$，於是不難求出 $s_{64} = 2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$。哇！好多米！

問題1.（養兎子問題）

假設我們養了一對異性兎子（永遠活著），而且每個月都會生出一對異性兎子，生出來的小兎子都會在兩個月後長成而且開始生出一對異性小兎，如果我們假設所有的兎子都一直活著，而且只有生出來的一對才會在兩個月後生出另一對，問一年後共有多少對兎子。

首先，令在第 k 個月的第一天時，兎子一共有 F_k 對。即 $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, F_6 = 13, F_7 = 21, \cdots$。從上述的值我們不難看出遞迴關係

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \tag{1}$$

這也可以由問題的假設求出來。在下一節我們再來求 F_n，不過如果要用 (1) 來證明 $F_n = \dfrac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}$ 並不難。(直接代入計算)

用遞迴關係看亂排（Derangement）

命題 4.1. 試證 $D_{n+1}=n(D_{n-1}+D_n)$。

證明. 令 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n+1}\end{pmatrix}$ 爲任意的一個亂排，且 $a_1=k, k=2,\cdots,n+1$。現在看 a_k，當 $a_k=1$ 時，排列的方式共有 D_{n-1} 種。在 $a_k\neq 1$ 時，可以把 k 當成 1，排列方式將會有 D_n 種（如圖 4.1），因此我們證明了命題 1。

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n & n+1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n & a_{n+1}\end{pmatrix}$$

圖 4.1

問題2.（不可結合的運算）假設 $\circ$ 爲集合中的一個二元運算，由於結合律不一定成立，所以 $x_1\circ x_2\circ x_3\circ\cdots\circ x_n, n\geq 3, x_i\in S, i=1,2,\cdots,n$，並沒有意義；所以我們需要適當地加入括號。令 μ_n 表示加入括號的方式 (不同) 之總數。求 μ_n。

我們不難求出 $\mu_2=1,\mu_3=2,\mu_4=5$（$a(b(cd)), a((bc)d), (ab)(cd), ((ab)c)d, (a(bc))d$ 。同時也可找到遞迴關係（作業）

$$\mu_n=\sum_{m=1}^{n-1}\mu_m\mu_{n-m}\ (\ n\geq 2\ )。\tag{2}$$

解：令

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n x^n \quad (\mu_1=1)\\
&=\mu_1 x+\mu_2 x^2+\ldots\\
&=x+\sum_{n=2}^{\infty}\mu_n x^n\\
&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{m=1}^{n-1}\mu_m\mu_{n-m})x^n\\
&=x+\sum_{n=2}^{\infty}(\mu_1\mu_{n-1}+\mu_2\mu_{n-2}+\ldots+\mu_{n-1}\mu_1)x^n\\
&=x+[f(x)]^2
\end{aligned}$$

$$[f(x)]^2 - f(x) + x = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
(1-4x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-1-\frac{1}{2})}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-5)(2n-3)}{n!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{(n-1)!(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} x^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n
\end{aligned}$$

$f(0)=0$

取 $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$，則 $f(x) = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n} \dbinom{2n-2}{n-1} x^n$，

所以 $\mu_n = \dfrac{1}{n} \dbinom{2n-2}{n-1}$。

問題 2 的解顯然是用生成函數的方法求出來的，我們現在介紹另一種方法。

特徵根的方法（The Method of Characteristic Roots）.

首先我們來看兩個例子。

例1. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$。

$$a_k x^k = 2a_{k-1}x^k + 3a_{k-2}x^k, k \geq 2$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i &= 2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}x^i + 3\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2}x^i \\ &= 2x\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}x^{i-1} + 3x^2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2}x^{i-2} \qquad (3)\end{aligned}$$

令 $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$，則 (3) 式可以化成

$$G(x) - a_0 - a_1 x = 2x(G(x) - a_0) + 3x^2 \cdot G(x)\ ,$$

$$G(x) = \frac{+a_0 + a_1 x - 2xa_0}{1 - 2x - 3x^2}$$

代入 a_0, a_1 及利用部份分式可求得

$$G(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+x}$$

因此 $G(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$

$$a_n = \frac{1}{4}3^n - \frac{1}{4}(-1)^n \text{。}$$

[**觀察**]

1. $3^n, (-1)^n$ 皆爲 $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ 的解。(不假設 $a_0 = 0$ 及 $a_1 = 1$)
2. 3 與 -1 爲 $\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$ 之兩相異根。
3. 2 . 可以由假設 $a_n = \alpha^n$ 求得。

例2. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = 2, n \geq 2$。
利用和例 1 相同的方法可以求得

$$\begin{aligned}G(x) &= \frac{C_1}{1-3x} + \frac{C_2}{(1-3x)^2} \\ &= C_1\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i + C_2\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+1}{i}3^i x^i \text{。}\end{aligned}$$

因此

$$a_n = C_1 3^n + C_2(n+1)3^n$$
$$= (C_1 + C_2)3^n + C_2 n \cdot 3^n$$

利用 $a_0 = 1, a_1 = 2$，可求出 $C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = -\frac{1}{3}$，因此解爲

$$a_n = 3^n - \frac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = 3^n - n \cdot 3^{n-1}\text{。}$$

[**觀察**]

1. 3^n 及 $n \cdot 3^n$ 皆爲解。(不假設 $a_0 = 1$ 及 $a_1 = 2$)
2. 3 爲方程式 $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ 之兩相異根。
3. $\dfrac{\alpha}{(1-\beta x)^t} = \alpha \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dbinom{t+k-1}{k} \beta^k x^k, t \geq 1$。

由上面兩個例子，我們可以發現，求出適當方程式之解就可以得到兩個例子的答案。

====(以下理論部份提供同學參考)

定義 4.2. 一個遞迴關係若其形式爲 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}, n \geq p$ 且 $c_1, c_2, \cdots, c_p \neq 0$ 爲常數，則此遞迴關係爲常係數線性齊次遞迴關係。

爲了求遞迴關係 $a_n = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i a_{n-i}, n \geq p, c_p \neq 0$ 時 a_n 的 (唯一) 解，我們需要 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 等 p 個值，這些值又稱爲起始值 (initial values) 也稱爲是此遞迴關係的起始條件。由上面兩個例子，我們發現 a_n 可以寫成 $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \cdots, \alpha_p^n$ 的線性組合或是 $\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \cdots, n^t\alpha_1^n, \alpha_2^n, n\alpha_2^n, \cdots$ 的線性組合，這決定於方程式

$$\alpha^p - c_1\alpha^{p-1} - c_2\alpha^{p-2} - \cdots - c_p = 0 \tag{4}$$

是否有重根。方程式 (4) 稱爲特徵方程式 (Characteristic equation) (這方程式是由假設 $a_n = \alpha^n$ 得來。) 它的根稱爲特徵根 (Characteristic roots)。

定理 4.3. 令 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 爲常係數線性齊次遞迴關係 $a_n = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i a_{n-i}, \quad n \geq p,$ 的 p 特徵根，則 $a_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_p\alpha_p^n$ 爲此遞迴關係的解，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 爲常數。同時，如果此 p 個根皆不相等，則遞迴關係的解必爲上述形式，而且解也可以由 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 的值來唯一決定。

證明. 前半部份的證明可以直接代入核算，在此省略。我們看第 2 部份。由於 $a_n = \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2\alpha_2^n + \cdots + \lambda_p\alpha_p^n$ 爲一解，所以

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p = a_0 \\ \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_p\alpha_p = a_1 \\ \quad\vdots \\ \lambda_1\alpha_1^{p-1} + \lambda_2\alpha_2^{p-2} + \cdots + \lambda_p\alpha_p^{p-1} = a_{p-1} \end{cases} \tag{5}$$

聯立方程組 5 可以用矩陣的形式表示成 $A\vec{x} = \vec{b}$，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_p^2 \\ \vdots & & & \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-2} & \cdots & \alpha_p^{p-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}$$

由線性代數的基本性質，我們知道如果 $\det A$ (行列式) 不等於 0，則 $\vec{x}$ 有唯一解，於是第二部份得證。而 $\det A$ 恰爲有名的范得蒙地行列式 (Vandermonde Determinant)，它的值等於 $\prod\limits_{1\le i<j\le p} (\alpha_j - \alpha_i)$。因此，在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 皆不相等的情況下自然不等於 0。

現在討論有重根的情形：假設特徵方程式 (4) 有 q 個不同根，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$，且 α_i 有 μ_i 重根，$\mu_i \ge 1, i = 1, 2, \cdots, q$。我們稱下列值爲 (4) 的基本解 (basic solutions)：

$\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \cdots, n^{\mu_1-1}\alpha_1^n, \alpha_2^n, n\alpha_2^n, \cdots, n^{\mu_2-1}\alpha_2^n, \cdots, \alpha_q^n, n\alpha_q^n, \cdots, n^{\mu_q-1}\alpha_q^n$。爲了便於表示，我們用 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$ 表示，於是得到以下的定理。

定理 4.4. 如果遞迴關係 $a_n = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i a_{n-i}, n \ge p$，具有基本根 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p$，則一般解的形式爲 $a_n = \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_p\beta_p$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ 爲常數。

證明. 省略。

現在我們回頭來解問題 1，首先，由下表可以看出遞迴關係式 (1) 是正確的。(六個月的例子如下頁)

第 k 個月初	成兎	一個月大的兎子	出生的兎子	總數 F_k
1	1(對)	0	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8
6	5	3	5	13

因此，$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, F_0 = F_1 = 1$，
利用特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$，求得 $\alpha = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$。
由定理 4.3，求得遞迴關係的爲一解

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{(-1)}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k 。$$

值得一提的是費伯納西數 F_k（Fibonacci Number）具有很多自然現象結合的特性，以下就舉一例說明。

例. 令 $G_k = \dfrac{F_k}{F_{k-1}}$，則 G_k 代表成長率（Growth Rate），我們可以證明 $\lim_{k\to\infty} G_k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$。這個值也就是黃金分割比值（Golden Ratio）。

用生成函數解遞迴關係

上述，我們已經大致介紹了如何利用生成函數來解遞迴關係。以下我們進一步來看聯立的遞迴關係。

問題3. 我們用集合 $\{0,1,2,3\}$ 的元素來寫成一個長度爲 k（k 個元素）的字碼（Codeword）使得字碼中 0 和 3 都出現偶數次，問一共有多少個這種字碼？

解. 令 a_k 爲所求的字碼數，b_k 爲出現偶數個 0 及奇數個 3 的字碼數，c_k 爲出現奇數個 0 及偶數個 3 的字碼數及 d_k 爲出現奇數個 0 及 3 的字碼數。則我們可以求得下面的聯立遞迴關係，且 $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 1$。

$$\begin{cases} a_{k+1} = 2a_k + b_k + c_k \\ b_{k+1} = b_k - c_k + 4^k \\ c_{k+1} = c_k - b_k + 4^k \end{cases} \tag{6}$$

考慮 $g.f.\ A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ 且 $C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k$ 。(6) 可以改寫成

$$\begin{cases} \frac{1}{x}[A(x)-a_0]=2A(x)+B(x)+C(x) \\ \frac{1}{x}[B(x)-b_0]=B(x)-C(x)+\dfrac{1}{1-4x} \\ \frac{1}{x}[C(x)-c_0]=C(x)-B(x)+\dfrac{1}{1-4x}, \end{cases} \tag{7}$$

同時 a_0,b_0,c_0 滿足

$$\begin{cases} 2=2a_0+b_0+c_0 \\ 1=b_0-c_0+1 \\ 1=c_0-b_0+1 \end{cases} \tag{8}$$

由 (8) 求得 $a_0=1,b_0=c_0=0$, (7) 中的 $A(x),B(x)$ 及 $C(x)$ 亦可求出如下：

$$A(x)=\frac{1}{1-2x}[xB(x)+xC(x)+1]$$

$$B(x)=\frac{1}{1-x}[-xC(x)+\frac{x}{1-4x}]$$

$$C(x)=\frac{1}{1-x}[-xB(x)+\frac{x}{1-4x}]$$

所以 $B(x)=C(x)=\dfrac{x}{1-4x}$,

$$A(x)=\frac{2x^2-4x+1}{(1-2x)(1-4x)}=1+\frac{x}{1-4x}+\frac{x}{1-2x}$$

因此 , $a_k=4^{k-1}+2^{k-1}, k>0,$ 且 $a_0=1$,
$b_k=c_k=4^{k-1}, k>0,$ 且 $b_0=c_0=0$ 。

(註1) 這種方法對於不是齊次的線性遞迴關係也可以求解 。
(註2) 比較困難的部份則是在化成冪級數的部份 。

雙標示遞迴關係 (Recurrence relations with two indices) (參考用)

在組合的討論中 , 我們得到一個關係式 $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, 這個式子就是具有兩個標示的遞迴關係 , 此時需要的一些條件為 $\binom{n}{0}=$

$1, \binom{0}{k} = 0, n \geq 1$ 且 $k \geq 1$。利用這個式子，我們自然可以遞迴地計算出 $\binom{n}{k}$。以下我們介紹這類型問題的處理方法。

雙標示遞迴關係的一般式可以表示成如下的形式：

$$\begin{aligned}f(n,m) = {} & C_{0,0}a_{n,m} + c_{0,1}a_{n,m-1} + c_{0,2}a_{n,m-2} + \cdots \\ & + c_{1,0}a_{n-1,m} + c_{1,1}a_{n-1,m-1} + c_{1,2}a_{n-1,m-2} \\ & + \cdots \\ & + \cdots + c_{k,0}a_{n-k,m} + c_{k,1}a_{n-k,m-1} + c_{k,2}a_{n-k,m-2} + \cdots ,\end{aligned}$$

其中 $c_{i,j}$ 爲常數 $0 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m$。我們可以利用 $g.f.$ 來解這類型的遞迴關係。首先，令 $A_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j, 0 \leq i \leq k$ 再令 $A(y,x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x)y^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}x^j\right)y^i = \sum_{i,j\geq 0} a_{i,j}x^jy^i$。於是 a_{ij} 是 x^jy^i 項的係數。

例. 在一個由 $0,1$ 所組成的字碼中，我們稱連續的兩個 1（或 0）爲一對相連的 1（或 0）。試求長度爲 n，恰有 m 對相連的 1 且沒有相連的 0 的字碼數。

解. 令 $a_{n,m}$ 爲所求的數，$b_{n,m}$ 爲這種字中第一位爲 1 的個數，$c_{n,m}$ 則代表第一位爲 0 的個數，所以

$$a_{n,m} = b_{n,m} + c_{n,m} \tag{9}$$

$$b_{n,m} = b_{n-1,m-1} + c_{n-1,m} \tag{10}$$

$$c_{n,m} = b_{n-1,m} \tag{11}$$

因此 $b_{n,m} = b_{n-1,m-1} + b_{n-2,m}$。 (12)

至於起使條件很容易看出此式在 $n \geq 3$ 及 $m \geq 1$ 才有意義，而且 $b_{n,0} = 1$，在 $i \leq j$ 時 $b_{i,j} = 0$ 及 $b_{0,0} = 1$，接下來考慮 $(b_{k,j})$ 的 $g.f.$ $B_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{k,j}x^j$，由 (12) 我們得到

$$B_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m}x^m = \sum_{m=1}^{\infty} b_{n-1,m-1}x^m + \sum_{m=1}^{\infty} b_{n-2,m}x^m$$

所以

$$B_n(x) = xB_{n-1}(x) + B_{n-2}(x), n \geq 3。$$

再利用

$$B(y,x)=\sum_{n=3}^{\infty}B_n(x)y^n=\sum_{n=3}^{\infty}xB_{n-1}(x)y^n+\sum_{n=3}^{\infty}B_{n-2}(x)y^n\ ,$$

求得

$B(y,x)=\dfrac{1+(1-x)y}{1-xy-y^2}$（如何化成冪級數形式？）

由 (11)，$C(y,x)=yB(y,x), c_{0,0}=0$，因此

$$\begin{aligned}A(y,x)&=B(y,x)+C(y,x)\\&=(1+y)B(y,x)\\&=1+2y+(2+x)y^2+(2+2x+x^2)y^3+(2+3x+2x^2+x^3)y^4\\&\quad+(2+4x+4x^2+2x^3+x^4)y^5+\cdots\end{aligned}$$

$a_{n,m}$ 即爲 $A(y,x)$ 中 x^my^n 項的係數。例如 $a_{4,1}=3$，($1101, 1011, 0110$)。

(註) 這個例子中的 $a_{n,m}$ 不能明確地表示出來是美中不足的地方。這也說明了這類問題困難的地方。

(註) 有些例子會很容易。例如，$\sum_{i,j}\binom{i}{j}x^jy^i=\sum_i\left(\sum_j\binom{i}{j}x^j\right)y^i$，令 $F_n(x)=\sum_{j=0}\binom{n}{j}x^j=(1+x)^n$。

作業(附參考解答)

1. 利用生成函數的方法解遞迴關係 $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$。
2. 於問題 2 中,試證 $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$。
3. 解下列的遞迴關係:

   (i) $a_n = 9a_{n-1} = 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$。

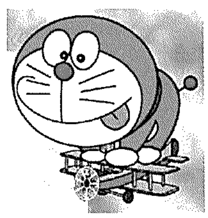
   (ii) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3$。

4. 假設 (a_n) 滿足遞迴關係 $na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ 且 $a_0 = e, a_1 = 2e$。令 $A(x)$ 爲 (a_n) 的 $g.f.$,試證

   (i) $A'(x) = 2(1+x)A(x)$。

   (ii) 求 $A(x)$。

5. 假設 $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = a_1 = 2$,求 a_n。
6. 假設 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, n, k \in \mathbf{Z}^+$,並且利用這個遞迴關係求出 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$。
7. 試求在由 $0, 1$ 所組成的字碼中,具有長度 6,兩對相連的 1 及沒有相連的 0 之字碼數。



參考解答.

2. 於問題 2 中，試證 $(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$。

解答. 用二項式定理展開

$$
\begin{aligned}
&(1-4x)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\cdot(-4x)^n\\
&= \binom{\frac{1}{2}}{0}\cdot(-4x)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times\cdots\times(\frac{2n-3}{2})}{n!}\right)\cdot(x^n)\\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot(\frac{1}{2})^n\cdot\left(\frac{1\times1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{n!}\right)\cdot(x^n)\\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\left(\frac{(2n-2)!}{n!\cdot(2\times4\times\cdots\times(2n-2))}\right)\cdot(x^n)\\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}\cdot\left(\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\right)\cdot(x^n)\\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n
\end{aligned}
$$

3. 解下列的遞迴關係：

解答.

(i) $a_n = 9a_{n-1} = 15a_{n-2} + 7a_{n-3}, a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2$。

由題可設 $x^3 = 9x^2 - 15x + 7$

$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 15x - 7 = 0$

因式分解得 $(x-7)(x-1)^2$

$\Rightarrow x = 1$ (2 重根) , 7

則令 $a_n = \alpha\cdot7^n + \beta\cdot1^n + \gamma\cdot n\cdot1^n$

將 a_0, a_1, a_2 代入 $\Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha+\beta \\ 1 = 7\alpha+\beta+\gamma \\ 2 = 49\alpha+\beta+2\gamma \end{cases}$

解得 $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$

$\therefore a_n = n$

(ii) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}, a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3$ 。

由題可設 $x^3 = 3x - 2$

$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

因式分解得 $(x+2)(x-1)^2$

$\Rightarrow x = 1$（2 重根）, 7

則令 $a_n = \alpha \cdot (-2)^n + \beta \cdot 1^n + \gamma \cdot n \cdot 1^n$

將 a_0, a_1, a_2 代入 $\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = -2\alpha + \beta + \gamma \\ 3 = 4\alpha + \beta + 2\gamma \end{cases}$

解得 $\alpha = \frac{2}{9}, \beta = \frac{7}{9}, \gamma = \frac{6}{9}$

$\therefore a_n = \frac{2}{9} \cdot (-2)^n + \frac{7}{9} \cdot 1^n + \frac{6}{9} \cdot n \cdot 1^n$

$= \frac{1}{9}(-(-2)^{n+1} + 6n + 7)$

4. 假設 (a_n) 滿足遞迴關係 $na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}), n \geq 2$ 且 $a_0 = e, a_1 = 2e$。令 $A(x)$ 爲 (a_n) 的 $g.f.$, 試證

解答.

(i) $A'(x) = 2(1+x)A(x)$ 。

令 $A(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow A'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1}$

由 $na_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}) = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$

$\Rightarrow na_n x^{n-1} = 2a_{n-1}x^{n-1} + 2a_{n-2}x^{n-1}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^{n-1} = 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1}$

$i.e.\ A'(x) = 2A(x) + 2xA(x)$

$\therefore A'(x) = 2(1+x)A(x)$

(ii) 求 $A(x)$ 。

$\because A'(x) = 2(1+x)A(x)$ 又 $A(x) \neq 0$

$\Rightarrow \frac{A'(x)}{A(x)} = 2 + 2x$

$\Rightarrow (\ln A(x))' = 2 + 2x$

$$\Rightarrow \ln A(x) = 2x + x^2 + c$$

$$\therefore A(x) = e^{x^2+2x+c} = e^c \cdot e^{2x} \cdot e^{x^2}$$

$$= e^c \cdot (1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots) \cdot (1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots)$$

因爲 $a_0 = e, a_1 = 2e \Rightarrow c = 1$

$$\therefore A(X) = e \cdot (1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots) \cdot (1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \cdots)$$

5. 假設 $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = a_1 = 2$，求 a_n。

解答.

觀察

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \cdot a_{n-1} \\
&= (a_{n-1} \cdot a_{n-2}) \cdot a_{n-1} = a_{n-1}^2 \cdot a_{n-2} \\
&= (a_{n-2} \cdot a_{n-3})^2 \cdot a_{n-2} = a_{n-2}^3 \cdot a_{n-3}^2 \\
&= (a_{n-3} \cdot a_{n-4})^3 \cdot a_{n-3}^2 = a_{n-2}^5 \cdot a_{n-3}^3 \\
&= \cdots \\
&= 2^{F_n + F_{n-1}} = 2^{F_{n+1}}
\end{aligned}$$

，F_n 爲 *Fibonacci sequence* 的第 n 項

$$\therefore a_n = 2^{F_n} = 2^{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}}$$

6. 假設 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, n, k \in \mathbf{Z}^+$，並且利用這個遞迴關係求出 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$。

解答.

1° $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ 爲把 n 個東西分爲 k 個非空子集的方法數，所以可以看成先把其中一個拿起來，令其爲 a_n

$\Rightarrow$ 包含 a_n 的子集 A_n

$$\Rightarrow |A_n| = \begin{cases} 1 & if\ A_n = \{a_n\} \\ b, b > 1 & otherwise \end{cases}$$

$$\therefore \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

其中 $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$ 爲先把剩下的 $n-1$ 分完，再加上 $\{a_n\}$

另一項則是先把剩下 $n-1$ 個分完，再把 a_n 放入其中一個子集中，共 k 種放法。 ■

2° (非用遞迴關係的解法，僅供參考)

令 $T(n,k)$ 爲把 n 個元素分在 k 個有次序排定的非空集合之方法數，則 $T(n,k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot k!$，我們先找出 $(T(n,k))$ 的指數生成函數。令 $C(i)$ 代表元素 i 所被分列的集合，則 $T(n,k)$ 可以想成是用 k 種物品來形成的一個 n 個位置的排列 $C(1)C(2)\cdots C(n)$，所以 $T(n.k)$ 的生成函數

$H(x) = (\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots)^k = (e^x - 1)^k$ (因爲集合非空，所以沒有 1)

利用二項式展開式

$$\begin{aligned} H(x) &= ((-1) + e^x)^k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i (e^x)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (k-i)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

所以 $T(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

即 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$

5. 鴿籠原理 (Pigeon-Hole Principle, PP)

鴿籠原理基本上是一個平均值概念的應用，在組合數學中有很多存在性的定理都可以利用它來加以證明。

鴿籠原理.

有 $n+1$ 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有兩隻以上的鴿子。

鴿籠原理的推廣.

有 $mn+1$ 隻鴿子飛入 n 個鴿籠時，必定存在一個鴿籠它裡面有 $m+1$ 隻以上的鴿子。

證明. 如果每個籠子中最多只有 m 隻鴿子，則總數必小於 $mn+1$。 ■

(註) 在利用鴿籠原理的時候，選定籠子比較關鍵。

命題 5.1. 任給 n 個整數 $a_1, a_2, ...a_n$；定義 $S_{k,h} = \sum_{i=k}^{h} a_i$，則必定有一個 $S_{k,h}$ 它是 n 的倍數，其中 $1 \leq k \leq h \leq n$。

證明. 令 $S_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$，$d_j \equiv S_j (mod n), 0 \leq d_j \leq n-1$。

如果存在一個 $1 \leq j \leq n$ 使得 $d_j = 0$，則 $n|S_j = S_{1,j}$，得證。

不然的話 $d_1, d_2, ...d_n$ 皆不爲 0，則必存在某兩個 d_h 及 d_k，$1 \leq k \leq h \leq n$，使得 $d_h = d_k$（鴿籠原理），因此 $n|S_{k+1,h}$。 ■

(註) 命題 5.1 的另一形式爲：令 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 爲 n 個整數所成的集合，則必定存在一個 $B \subseteq A$ 使得 $\sum_{x \in B} x$ 爲 n 的倍數。

命題 5.2. 任意長度爲 n^2+1 的實數列必包含有長度爲 $n+1$ 的單調 (monotonic) 子數列。

證明. 令 $(a_1, a_2, ..., a_{n^2+1})$ 爲給定的實數列，$m_i, 1 \leq i \leq n^2+1$，爲由 a_i 開始遞增子數列的最大長度。如果有 $m_i \geq n+1$ 則命題得證。現在假設所有的 $m_i, 1 \leq m_i \leq n$，由於總共有 n^2+1 項，因此，至少有 $n+1$ 個 m_i，$i \in \{1, 2, \cdots n^2+1\}$ 具有相同的值（鴿籠原理的推廣），令它們爲

$m_{i_1}, m_{i_2}, \cdots, m_{i_{n+1}}$。現在考慮 $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{n+1}})$，它必定是一個（嚴格）遞減的子數列，否則 $a_{i_j} \geq a_{i_k}$，其中 $j > k$。於是 $m_{i_k} \geq m_{i_j} + 1$，這與上述矛盾，因此命題得證。 ∎

命題 5.3. 令 n 爲奇數，$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 爲 n 個正整數所成的集合，α 爲 A 一個排列，亦即 α 爲由 A 映至 A 的 1 對 1 映成函數。則 $\prod_{i=1}^{n} (a_i - \alpha(a_i))$ 爲偶數。

證明. 令 $n = 2t+1$，則 A 中至少有 $t+1$ 個數同爲奇數或偶數（鴿籠原理），令它們爲 $a_1, a_2, \cdots, a_{t+1}$。由於 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{t+1}\} \cap \{\alpha(a_1), \alpha(a_2), \cdots, \alpha(a_{t+1})\} \neq \phi$，$a_i \neq \alpha(a_j)$，$1 \leq i, j \leq t+1$。於是 $a_j - \alpha(a_j) = a_j - a_i$ 爲偶數，因此，命題得證。 ∎

(註) n 爲偶數時，命題不一定會成立。

命題 5.4. 在 $\{1, 2, 3, \cdots, 2n\}$ 中任取 $n+1$ 個元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$，則必定存在 a_i, a_j，$1 \leq i \neq j \leq n+1$，使得 $a_i | a_j$ 或是 $a_j | a_i$。

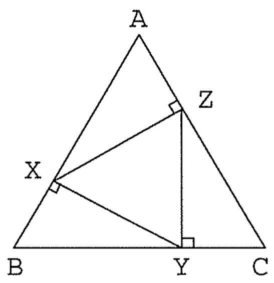
證明. 令 $a_i = 2^{b_i} \cdot p_i$，其中 p_i 爲奇數。由於 p_i 有 n 個（最多），所以必定存在兩個 a_i, a_j，它們的 $p_i = p_j$，因此命題得證。 ∎

命題 5.5. 令 $\triangle ABC$ 爲一邊長 1 單位的正三角形，則任意放入 $n^2 + 1$ 個點，必定有兩點的距離不大於 $1/n$。

證明. 將 $\triangle ABC$ 分割成 n^2 個邊長爲 $1/n$ 單位的正三角形。 ∎

命題 5.6. 令 $\triangle ABC$ 爲一正三角形，同時將 $\varepsilon = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ 分割成兩個集合 ε_1 與 ε_2。證明，ε_1 與 ε_2 中必有一個集合可以用它的點來形成一個直角三角形。

證明. 假設命題有誤。首先，在 $\triangle ABC$ 的三邊上各找一點 X, Y 及 Z 使得 $\overline{ZY} \perp \overline{BC}, \overline{YX} \perp \overline{AB}, \overline{XZ} \perp \overline{AC}$，如下圖所示。則 X, Y 及 Z 三點至少有兩點會落在 ε_1（或 ε_2）。不失一般性，令 X, Y 爲 ε_1 中的兩點。因此，$\overline{AB} \backslash \{X\}$ 上的點都不會在 ε_1 中，也就是說 $\overline{AB} \backslash \{X\}$中的點全部在 ε_2 中，如此一來 C 和 Z 都不會在 ε_2 中，所以 $C \in \varepsilon_1, Z \in \varepsilon_1$，再加上已知 $Y \in \varepsilon_1$，因此 $\triangle CZY$ 爲一直角三角形，它的頂點皆來自 ε_1，此與假設矛盾，命題得證。



■

命題 5.7. 在 6 個人中必定有 3 個人彼此都相識或是彼此都不相識。

證明. 任選一人，則與此人相識的如果不到三人，則與此人不相識的就一定至少三人；現在假設有三人與此人相識 (不相識的部份，討論方式相似) 。如果這三人中有兩人彼此相識，則已經有三人彼此相識；否則的話，此三人彼此皆不相識，命題得證。 ■

這個命題也可以用圖的模式 (Graph Model) 的描述：先在平面上畫六個點，分別代表這六個人；如果兩人相識就畫一藍邊，不相識則畫一紅邊; 於是在畫完所有的 15 個邊之後，必然會有一個 " 同色 " 三角形，亦即三邊均為藍色或是紅色。以這種形式來表示，比較容易探討更深入的概念。

廣義的鴿籠原理.

令 $n, k_1, k_2, \cdots, k_n$ 為自然數 (正整數) 。假如有 $(\sum_{i=1}^{n} k_i) - (n-1)$ 隻鴿子飛入 n 個籠子，則第一個籠子至少有 k_1 隻鴿子，或是第二個籠子至少有 k_2 隻鴿子，$\cdots\cdots$，或是第 n 個籠子有 k_n 隻鴿子。

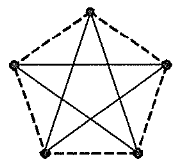
證明. 如果上述不對，則鴿子的總數 $S \leq \sum_{i=1}^{n} (k_i - 1)$，此與假設矛盾，因此命題得證。 ■

命題 5.8. 平面上的 17 個點，兩點之間任意用紅、黃、藍三個顏色中的一色畫線，則至少會有一個同色三角形。

證明. 任選一點 A，考慮與它相連的 16 個點，由廣義的鴿籠原理，至少有 6 個邊塗同一顏色 (假設是紅色)；再看看這 6 點之間的關係，如果有

任何一邊是紅色，則已經找到一個同色（紅色）的三角形；不然的話，這 6 點之間只能用黃、藍二色來連；由命題 7，必定會存在一個同色三角形 (黃或藍)，因此命題得證。 ■

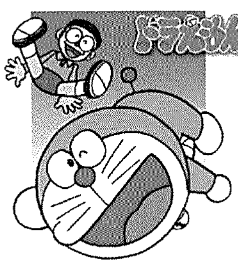
如果我們把命題 5.7、5.8 的點數各減一點，同色三角形就可能會不出現，如下圖是命題 7 的情形，命題 8 的情形比較複雜，在此省略。於是, 我們可以定義用兩色連接會產生同色三角形的最少點數爲 $R(3,3)$，而三種顏色的值就是 $R(3,3,3)$。



上面的 $R(3,3)$ 自然可以推廣到 $R(p,q)$，它代表用兩色（有次序）連線，出現 p 個點彼此都用藍色連或出現 q 個點彼此都用紅色連所需要的最少點數。例如 $R(3,4)=9$，你會證明嗎？ 當然，多色的情況下也可以尋找 $R(p_1,p_2,\cdots,p_t)$。$R(p,q)$ 一般稱之爲兩類的藍西數（Ramsey Number with Two Classes），而 $R(p_1,p_2,\cdots,p_t)$ 爲 t 類的藍西數，研究藍西數是圖論中重要的專題，在此不再作深入的探討。

作業（附參考解答）

1. 令 A 爲 $n+1$ 個相異正整數所成的集合。證明在 A 中必存在兩個元素 a 與 b 使得 $n|(a-b)$。
2. 令 A 爲 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 的一個子集合，而且 $|A|=n+1$。證明在 A 中必存在兩個互質的元素。
3. 令 n 爲奇數。證明在集合 $\{2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots,2^{n-1}-1\}$ 中必定有一個元素它是 n 的倍數。
4. 對於任意的正整數 p,q，證明 $R(p,q)\leq\binom{p+q-2}{p-1}$。
5. 利用 4. 證明對任意正整數 $m(\geq 4)$，均可找到一個 $N(m)$，使得平面上任三點不共線的 n 個點中必定可以找到一個由 m 點所形成的凸 m 邊形。
6. 令 A 爲 13 個相異實數所成的集合。證明在 A 中存在兩個元素 x 與 y 使得 $0<\dfrac{x-y}{1+xy}\leq 2-\sqrt{3}$。



參考解答.

1. 令 A 爲 $n+1$ 個相異正整數所成的集合。證明在 A 中必存在兩個元素 a 與 b 使得 $n|(a-b)$。

   證明. 令 $R=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$|R|=n$

   已知 $|A|=n+1$，則 A 中所有的元素除以 n 所得的餘數必定落在 R 中。由鴿籠原理可知，A 中至少有兩個數 a,b 除以 n 同餘 r，令 $a>b$，則 $a=nq_1+r,=nq_2+r,q_1>q_2$ 所以 $a-b=nq_1+r-(nq_2+r)=n(q_1+q_2)$

   $\therefore n|a-b$ ■

2. 令 A 爲 $\{1,2,3,\cdots,2n\}$ 的一個子集合，而且 $|A|=n+1$。證明在 A 中必存在兩個互質的元素。

   證明. 將 A 中得元素分爲 n 組，第 i 組的元素爲 $\{2i-1,2i\}$

   ($i.e.\ A=\{\underline{1,2},\underline{3,4},\underline{5,6},\cdots\underline{2i-1,2i},\cdots,\underline{2n-1,2n}\}$)

   因爲 $|A|=n+1$，由鴿籠原理可知，A 必定有兩個元素是落在同一組，假設落在第 k 組，則 $2k-1,2k\in A$，$gcd(2k-1,2k)=1$。 ■

3. 令 n 爲奇數。證明在集合 $\{2^1-1,2^2-1,2^3-1,\cdots,2^{n-1}-1\}$ 中必定有一個元素它是 n 的倍數。

   證明. 令 $R=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$W=\{2^1-1,2^2-1,\cdots,2^{n-1}-1\}$

   1° 當 $n=1$，則 $2^{1-1}-1=0,1|0$

   2° 當 $n>3$，且 n 爲奇數

   假設 n 不能整除 W 中所有的元素。W 中所有的元素除以 n 的可能餘數所形成的集合爲 $R=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$。但是當 $2^{i-1}-1$ 除以 n 餘 $n-1$ 時，

   $2^{i-1}-1=nq_1+(n-1)\Rightarrow 2^i=nq_1+n=n(q_1+1)$

   $\because n\geq 3\therefore (q_1+1)<2^i$

   $\therefore 2|n$ 則 n 是偶數 (矛盾)

   $\therefore n-1\notin R$

   則 $R=\{0,1,2,\cdots,n-2\}$，$|R|=n-2$

由鴿籠原理可知，在 W 中至少存在兩個數 $2^{i-1}-1, 2^{j-1}-1$ 除以 n 同餘 r，(令 $2^i-1 > 2^{j-1}-1 \Rightarrow i > j$)

$\therefore n|2^{i-1}-1-(2^{j-1}-1) \Rightarrow n|2^i-2^j \Rightarrow n|2^j2^i-1$

$\because n$ 不能整除 2^j 且 $gcd(n,2^j)=1$

$\therefore n|2^{i-j}-1$，又 $2^{i-j}-1 \notin W$ (矛盾)

所以 W 中存自有一個元素 $2^{k-1}-1$ such that $n|2^{k-1}-1$。 ■

4. 對於任意的正整數 p, q，證明 $R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$。

證明. 首先我們欲證明 $R(p,q) \leq R(p-1,q)+R(p,q-1)$

令 $n = R(p-1,q)+R(p,q-1)$

為了證得 $R(p,q) \leq n$，我們必須證明對於一個含有 n 個點且彼此有邊相連的圖 (稱此圖為 G)，用紅藍兩色對圖 G 的邊進行著色，則必存在有 p 點彼此皆用藍線相連或是存在有 q 點彼此皆用紅線相連。

令圖 G 中的一點為 v，則點 v 在圖 G 中和 $R(p-1,q)+R(p,q-1)-1$ 個邊相接。利用廣義鴿籠原理得知，圖 G 中有 $R(p-1,q)$ 個邊塗上藍色，或者有 $R(p,q-1)$ 個邊塗上紅色，今假設前者成立。

令集合 X 為圖 G 中所有異於點 v 且相接於 $R(p-1,q)$ 個藍邊的所有點。因為 $|X| = R(p-1,q)$，所以由這 $|X|$ 個點及連接彼此的邊所形成的圖 (稱此圖為 Gx) 中包含有 $p-1$ 個點全用藍線相連，或是 q 點全用紅線相連。假如後者成立，則得證；假如前者成立，則圖 Gx 再加上點 v 及在圖 G 中彼此相連的邊，則存在有 p 點全用藍線相連。故證得 $R(p,q) \leq R(p-1,q)+R(p,q-1)$。

接著，我們利用歸納法於 $(p+q)$ 上，為證明 $R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$。由於 $R(1,q)=R(p,1)=1, R(2,q)=q, R(p,2)=p$，我們得知當 $p+q \leq 5$ 時，定理成立。令 $m,n \in N$，並假設定理在 $5 \leq p+q < m+n$ 時成立。則 $R(m,n) \leq R(m-1,n)+R(m,n-1)$

$$\leq \binom{m+n-3}{m-2}+\binom{m+n-3}{m-1}=\binom{m+n-2}{m-1}$$

故對任意 p,q，此定理皆成立。 ■

5. 利用 4. 證明對任意正整數 $m(\geq 4)$，均可找到一個 $N(m)$，使得平面上任三點不共線的 n 個點中必定可以找到一個由 m 點所形成的凸 m 邊形。

證明.

(1) 首先我們欲證不共線（三點）的五點中必有四點會形成凸四邊形。連接此五點中可成凸邊形的數點，假如此凸邊形爲凸五邊形或凸四邊形，則此定理得證。假如此凸邊形爲三角形，則剩餘的兩點必在此三角形內，用一線連接這兩點，依鴿籠原理得知，三角形上必有兩點位在此連線的同一邊，故此三角形上的兩點和三角形內的兩點可形成一凸四邊形，故定理得證。

(2) 接著我們證明任四點皆形成凸四邊形的 m 個點 $m(\geq 4)$ 必定會形成凸 m 邊形, 假若定理不成立，則可畫出凸 $t(< m)$ 多邊形，且其餘的點皆落在此凸 t 多邊形內，當我們把此凸 t 多邊形完全分割成三角形，則必存在有一點落在某一三角形中，然而此三角形和落在其中的點無法形成一凸四邊形，與原命題矛盾，故定理得證。

(3) 假設 $N(m) = R_4(m, 5)$。（現在元素爲 4–子集，即每一 4–子集塗上一個顏色。）將 n 點（$n \geq N(m)$）所有 4 點集合分成兩類，形成凸四邊形的一類 S_1，形成凹四邊形的一類 S_2。現在 $n \geq N(m)$, 所以不是存在有 m 個點它的所有 4–子集爲凸四邊形, 就是存在有 5 個點它的 4--子集皆形成凹四邊形，但是後者不可能（由 (1)），所以存在 m 個點它的 4–子集皆可形成凸四邊形，所以此 m 點形成一凸 m 邊形（由 (2)）。 ■

P.S. $R_l(p, q)$ 亦存在。$R(p, q) = R_2(p, q)$。

6. 令 A 爲 13 個相異實數所成的集合。證明在 A 中存在兩個元素 x 與 y 使得 $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} \leq 2-\sqrt{3}$。

證明. 已知所有實數可由 $\tan\theta$ 表示，$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$。

由鴿籠原理得知，13 個相異實數中必存在兩個元素 $x = \tan\theta_x$ 及 $y = \tan\theta_y$，使得 $\theta_x - \theta_y \leq \tan 15^\circ, \theta_x > \theta_y$。

所以，$0 < \dfrac{x-y}{1+xy} = \tan(\theta_x - \theta_y) \leq \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

亦即，$0 < \dfrac{x-y}{1+xy} \leq 2-\sqrt{3}$ ∎