第一章　基本性質

1.　圖的定義

一個圖 G 是一個序對 (V, E) , 其中 V 爲一個點集合, 而 E 則爲 2^V 的一個部分重集 (muti-set) , 這裡的 2^V 代表所有 V 的所有部份集合所形成的集合。

例 1. $V = Z_5$, $E = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}, \{0,3,4\}\}$ 。

例 2. $V = Z$, $E = \{\{1,2,4\} + i | i \in Z\}$。

例 3. $V = Z_{10}$, $E = \{\{i,j\} | i,j \in Z_{10}$ 且 $|i-j| = 1\}$。

爲了方便看, 我們可以把一個圖畫出來:

1. 點任意擺 ;
2. 包含一個點的邊畫一個弧圈 (*loop*) , 包含兩個點的邊則用一條線段連接該兩點, 包含三個點以上的邊則用一個簡單的封閉曲線將線上的點包括在內。

下圖爲上面第一個例子的畫法。

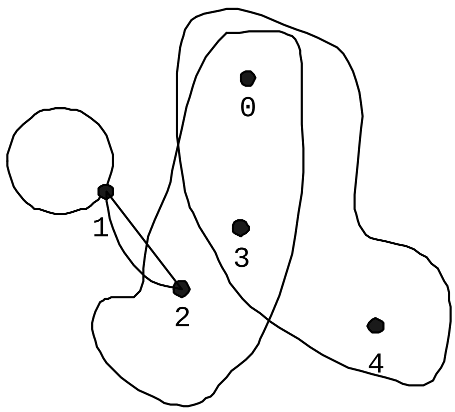


圖 1 : 例 1

當 V 爲有限集合時一個圖 $G = (V, E)$ 稱爲是有限圖 (Finite Graph) , 否則 G 爲無窮圖 (Infinite Graph) 。接下來再看 E , 當 E 中的邊容許有三個 或更多個點時, 此圖稱爲是超圖 (Hypergraph) , 不然就是一般圖 (General Graph) 。在一個一般圖中, 如果兩個點容許有重複的邊相連, 則此圖稱爲 Multigraph 重邊圖; 如果一個點上容許弧圈存在, 則此圖爲近圖 (Pseudograph) 。不含重邊及弧的圖我 們稱之爲簡單圖 (Simple Graph) 。

除非是在超圖的那一章中, 其他章節所討論的圖都是以一般圖爲對象。爲了對圖有一些基本 的認識, 在第一章中除了討論度數列外所討論的圖都是簡單圖, 於是圖的定義可以修飾如下 :

定義 1.1. (簡單圖)

一個圖 G 爲一個序對 (V, E) , 其中 V 爲點集合, 而 E 爲一些 V 的二元子集所形成的集合。爲了方便描述 G , $V(G)$ 代表圖 G 的點集合, 而 $E(G)$ 則代表圖 G 的邊集合。

2. 子圖 (Subgraph)

基本上, G 的子圖代表著 G 的一部份 ; 因此, 如果 $H = (V', E')$ 為 $G = (V, E)$ 的子圖時, 代表 $V' \subseteq V$, 而且 $E' \subseteq E$, 這敍述也是子圖的定義。例如圖 3 即為圖 2 的一個子圖。反過來稱 G 為 H 的擴充圖 (Supergraph) 。

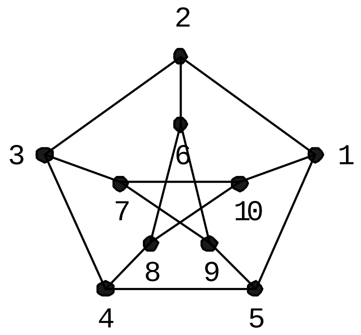


圖 2 : Petersen Graph (P)

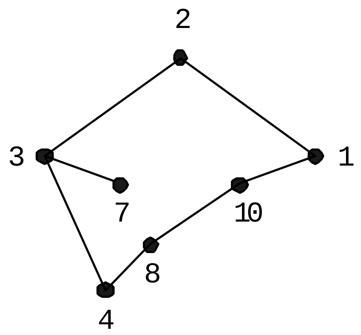


圖 3 : P 的一個子圖

顯然,"子圖"的關係和"子集"的關係都具有部份序 (Partial Order) 的性質, 而且任一個 G 的子圖都可以經由去 掉點或去掉邊而獲得, 不過,"只"利用去掉點的方式就不一定了" (?)。

定義 2.1. 令 e 為圖 $G = (V, E)$ 中的一個邊, 亦即 $e \in E$, 則 $G - e = (V, E \setminus \{e\})$ 。

定義 2.2. 令 v 為圖 $G = (V, E)$ 中的一個點, 亦即 $v \in V$, 則 $G - v = (V \setminus \{v\}, E')$ 其中 $E' = \{e | e \in E$ 且 v 不屬於 $e\}$ 。

定義 2.3. 我們稱 H 為 G 的一個導出子圖 (Induced Subgraph) 如果 H 可以由 G 經由去掉點的方式獲得 ; 如果 $G = (V, E)$, 而去掉的點所成的集合為 S' , 則 H 可用 $< V \setminus S' >_G$ 表示, 或是 $< S >_G$, 其中 $S = V \setminus S'$ 。

從這個定義也可以看出, H 基本上是利用 S 中的點所建構出來的圖, 而它所用的邊也就是 G 的邊, 所以也可以說 H 是由 S 生成 (Generate) 的圖。值得注意的是, 子圖不一定要如上述的方式產生, 例如圖 3 就不 是圖 2 的導出子圖。

上述的圖是由點集合所形成, 我們也可以用邊集合來生成一個圖。

定義 2.4. 令 $G = (V, E)$ 為一圖, $E' \subseteq E$ 。則 H 稱為是 G 的邊導出子圖 (Edge-induced Subgraph) 若且唯若 $H = (V', E')$, 其中 $V' = \{v \in V | v$ 是 e' 中某一邊的點 $\}$ 。H 也可以表成 $< E' >_G$ 。

3. 點的度 (Degree)

在圖 $G=(V,E)$ 中, 如果 $e=\{u,v\}\in E$, 則我們稱 u 與 v 相鄰或相連 (adjacent) , u (或 v) 與 e 相接 (incident) ; 如 果 e_1 , e_2 同時與 v 相接, 我們稱 e_1 與 e_2 是相接的邊。爲了方便起見, 相連的的兩點 u , v 通常以 $u\sim_G v$ 表示。值得一提的是這裡的" $\sim$ "並不是一個等價關係。爲了方便表示 $\{u,v\}$ 一般也寫成 uv 。

定義 3.1. (鄰域 Neighborhood)
在圖 G 中, 點 v 的鄰域 $N_G(v)$ 爲所有與 v 相鄰的點所成的集合, 亦即 $N_G(v)=\{u|u\in V(G)$ 且 $u\sim_G v\}$; 爲了 方便起見, 我們用 $N_G[v]$ 代表 $N_G(v)\bigcup\{v\}$ 。

定義 3.2. (度或度數 , Degree)
在圖 G 中, 點 v 的度 $deg_G(v)=|N_G(v)|$, 亦即所有和 v 相連點的個數。

定理 3.3. (圖論第一定理)
$2|E(G)|=\sum_{v\in V(G)} deg_G(v)$ 。

即一個圖中所有點的度的和等於邊數的兩倍。

推論 3.4. 在任意圖中具有奇數度的點 (奇點) 必有偶數個。

定義 3.5. 一個圖 G 的體積 (Volume) 爲 $\sum_{v\in V(G)} deg_G(v)$ 。

上述的定義看起來有些奇怪, 不過它拉近幾何與圖論的距離。(詳細的描述可以參考金芳蓉教授所寫的 Spectra Graph Theory.)

一個圖如果它的每個點都有相同的度數, 則該圖被稱爲是正則圖 (Regular Graph) ; 如果每個點的度數均爲 r , 則此圖又 稱爲是 r-正則圖 (r-regular) , r 直接稱爲是該圖的度 (Valency) 。

推論 3.6. 若 r 爲一奇數, 則任一個 r-正則圖均有偶數個點。

在圖 G 中, $|V(G)|$ 稱爲是 G 的秩 (order) , 而 $|E(G)|$ 則爲 G 的大小 (Size) 。於是, 我們不難 看出秩爲 p 的圖 G , 它的大小最大爲 $\binom{p}{2}$, 在這個情況下, G 中的任意兩點均有邊相連, 這樣的圖也稱爲是具有 p 點的完

全圖 (Complete Graph) 以 K_p 表示之。反過來, 一個點度數最小爲0, 這樣的點稱爲是孤立點 (Isolated Vertex) 。

定理 3.3 及推論 3.4 均爲很簡單的性質, 然而, 在圖論中卻扮演著非常吸引人的角色。下面的結果可以用來證明出名的定點定理 (Fixed Point Theorem) 。

令 A , B , C 分別爲一三角形的三個頂點, 同時在 A , B , C 上分別標上 1 , 2 , 3 。然後 任意在 ΔABC 的邊上及內部任意放入點, 同時連接成都是三角形的區域 (圖 4) 。現在規定在 $\overline{AB}$ 上的點標示 1 或 2 , $\overline{BC}$ 上的點標示 2 ,3 , $\overline{CA}$ 上的點標示 1 或 3 , 至於內部的 點則任意標示 1 或 2 或 3 。我們可以證明除了 ΔABC 這個三角形外, 另外還存在一個較小的三角形, 它 的三個頂點標示的數字皆相異, 也就是 1 , 2 ,3 皆出現。(作業 1.)

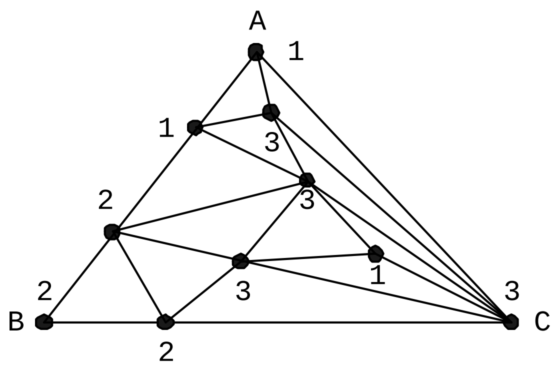


圖 4

作業2. 說明定點定理。

作業3*. 利用作業1 的結果証明定點定理。

作業4. 令 $\Delta(G)$ 代表 G 的點中最大的度。証明任給個圖 G , 必定存 在一個 G 的擴充圖 $\widetilde{G}$, $\widetilde{G}$ 爲 $\Delta(G)$-正則圖, 同時 $|V(\widetilde{G})| \leq 2|V(G)|$ 。

4. 圖的運算 (Graph Operations)

前面所提到的去掉一邊, 或去掉一點, 基本上就是一種運算 (Operation) , 以下所要介紹的 是將兩個圖放在一起。

定義 4.1. (聯集)
$G_1 = (V_1, E_1)$ 與 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的聯集以 $G = (V, E)$ 表示, 其中 $V = V_1 \bigcup V_2$, $E = E_2 \bigcup E_2$ 。

定義 4.2. (交集)
$G_1 = (V_1, E_1)$ 與 $G_2 = (V_2, E_2)$ 的交集為 $(V_1 \bigcap V_2, E_1 \bigcap E_2)$ 。

定義 4.3. (分割 Decomposition)
我們說 $G_1, G_2, ..., G_t$ 為 G 的一個分割, 如果下列的條件滿足 :

1. 對於所有的 $i \in 1, 2, ..., t$, $V(G_i) = V_i \subseteq V$;
2. $E(G_1) \bigcup E(G_2) \bigcup ... \bigcup E(G_t) = E(G)$; 及
3. 對於 $1 \leq i \neq j \leq t$, $E(G_i) \bigcap E(G_j) = \emptyset$ 。

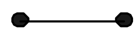
定義 4.4. (卡迪遜積 , Cartesian Product)
令 G 與 H 為兩個圖, G 與 H 的卡迪遜積為 $G \times H = (V, E)$, 其中 $V = V(G) \times V(H)$, $E = \{\{(u, x), (v, y)\} | u \sim_G v$ 且 $x = y$ 或 $u = v$ 且 $x \sim_H y\}$ 。

一般說到兩個圖的乘積指的就是這種乘積。

例 1 : n 維方塊 (n-cube)

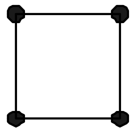
n = 1

$K_2 = Q_1$



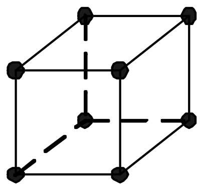
n = 2

$\mathrm{K}_2 \times \mathrm{K}_2 = \mathrm{Q}_2$



n = 3

$\mathrm{Q}_2 \times \mathrm{K}_2 = \mathrm{Q}_3$

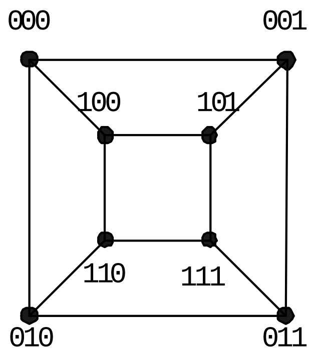


n 維方塊 (n-cube)

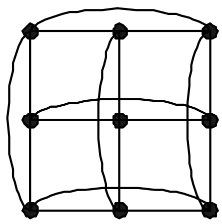
$$Q_n = Q_{n-1} \times K_2\text{。}$$

n 維方塊具有很多漂亮的性質, 其中一個是它的點集合可以用 $\mathbb{Z}_2^n$ 來表示, 而且兩點相連 的充要條件爲兩點的座標恰有一個位置不相等。

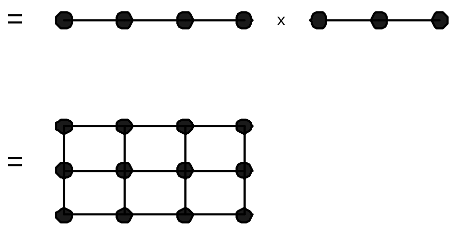
例 2 :



例 3 : $K_3 \times K_3$



例 4 : $P_4 \times P_3 = L_{3,4}$

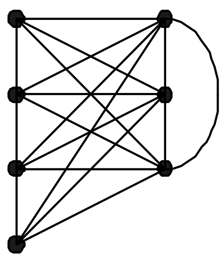


($L_{3,4}$)

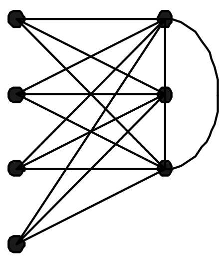
定義 4.5. (兩圖相連 , Join)

兩個不相交的圖 G 與 H 相連之後所得到的圖爲 $G \vee V = (V, E)$, 其中 $V = V(G) \bigcup V(H)$, $E = E(G) \bigcup E(H) \bigcup \{(u,v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$ 。

例 5 : $P_4 \vee K_3$



例 6 : $O_4 \vee K_3$ (完全分裂圖 , Complete Split Graph)

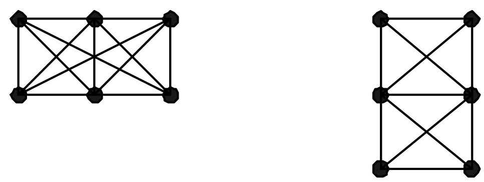


這個圖也可以由另一種運算獲得, 在後面再加以說明。

定義 4.6. (圖的合成 , Composition)

圖 G 與 H 的合成 $G[H]$ 爲圖 $G=(V,E)$, 其中 $V=V(G)\times V(H)$, $E=\{\{(u,x),(v,y)\}|u\sim_G v$ 或 $u=v$ 且 $x\sim_H y\}$ 。

例 7 :



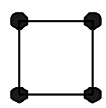
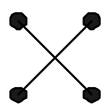
$P_2[P_3]$ $P_3[P_2]$

以下的兩種運算均對單一個圖進行。

定義 4.7. (補圖 , Complement)

圖 G 的補圖 $\overline{G}=(V(G),E')$, 其中 $e\in E'$, 若且唯若 e 不屬於 $E(G)$ 。

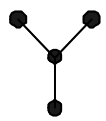
例 8 :

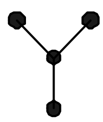
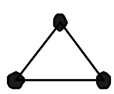
 的補圖爲 

定義 4.8. (邊圖 , Line Graph)

G 的邊圖 $L(G)=(E,X)$, 其中 $\{e,f\}$ 爲 X 中的邊, 若且唯若在 G 中 e 及 f 爲相接的兩邊。

例 9 :

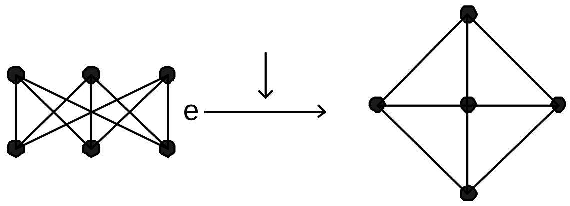
 不爲任何圖的邊圖。

 的邊圖爲 

定義 4.9. (邊收縮圖 , Edge Contraction)

一個圖 G 在 e 邊上收縮是指將 $e=\{u,v\}$ 去掉之後把 u , v 合成一點並且 保持它的連接關係。這樣的運算以 $G\downarrow e$ 表示。

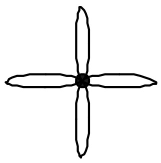
例 10：



定義 4.10. (收縮圖 , Contraction Graph)

G 的一個收縮圖是指能經由在 G 上一連串的邊收縮而獲得的圖。

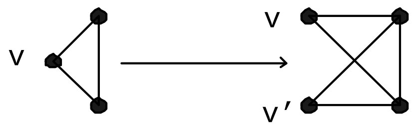
例 11：



是 $K_{3,3}$ 的一個收縮圖。

定義 4.11. (點分裂 , Vertex Split)

一個圖 G 在 v 點分裂爲二是指將圖 G 多增加一點 v' , 使得新圖 G' 中 $N_{G'}(v) = N_{G'}(v')$ 。



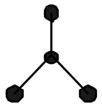
定義 4.12. (完全分裂圖 Complete Split Graph)

經由完全圖分裂出來的圖。(例 6)

作業5. 証明下列的敍述或給一個反例。

(1) $\overline{G_1 \vee G_2} = \overline{G_1} \vee \overline{G_2}$ 。(2) $\overline{G_1 \times G_2} = \overline{G_1} \times \overline{G_2}$ 。(3) $\overline{G_1[G_2]} = \overline{G_1}[\overline{G_2}]$ 。

作業6. 令 $L(G)$ 代表 G 的邊圖, 所以 $V(L(G)) = E(G)$, 試求 $|E(L(G))|$ 。(利用點的度)

作業7*. 除了  之外還有那些圖不爲其它圖的邊圖。

5. 圖的同構 (Isomorphism Graphs)

由於圖的點可以任意擺放, 或給予不一樣的標號, 於是本來具有”相同結構”的圖可能被認 爲是不一樣的圖, 如圖 5 所示。

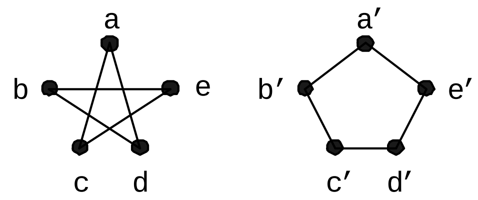


圖 5 : C_5

定義 5.1. (同構 , Isomorphism)

我們稱 G 與 G' 爲同構的兩個圖, 若且唯若存在一個由 $V(G)$ 對應至 $V(G')$ 的一對一映成函數 φ 使得 $u \sim_G v \Leftrightarrow \varphi(u) \sim_{G'} \varphi(v)$ 。

例如 : 圖 5 中的兩個圖同構, 所用的函數爲

$$\varphi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & d' & b' & e' & c' \end{pmatrix}$$

同構的兩個圖 G 與 G' , 一般也用 $G \cong G'$ 來表示。顯然, 同構是一個等價 關係 (?) 。而且同構的圖可以想成就是”一樣”的圖。究竟有多相像呢?

引理 5.2. 如果 $G_1 \cong G_2'$, 則 $|E(G_1)| = |E(G_2)|$ 。

定義 5.3. 將圖 G 中每一點的度數按大小順序排出來所得到的數列稱爲是 G 的度數列 (Degree Sequence) , 通常以 $(d_1, d_2, ..., d_{|V(G)|})$ 表示。如果 $|V(G)| = +\infty$, 則此數列爲 無窮數列。

引理 5.4. 如果 $G_1 \cong G_2$, 則 G_1 , G_2 具有相等的度數列。

證明.

由於 $G_1 \cong G_2$, 令 φ 爲兩圖同構的函數。由定義 $|N_{G_1}(v)| = |N_{G_2}(\varphi(v))|$, 亦即 $deg_{G_1}(v) = deg_{G_2}(\varphi(v))$, 故得證。 ■

然而引理 5.4 的逆敘述並不一定成立 (**作業**8.) ，也就是我們可以找到兩個圖它們具有相同的度數列, 但是這兩圖並不同構。

要判斷兩個圖"是否同構"是圖論中最重要的問題之一, 到目前爲止並沒有什麼好的方法來 完成這工作 ; 以演算法的術語來說, 是找不到一個以多項式時間 (Polynomial Time) 能完成判斷的演算法 (Algorithm) ; 就理論而言, 是找不到某些定性來刻劃何種圖會互相同構, 這裡所說的定性例如 : "具有相同的度數列", 或"一樣的大小", 或...。所以, 在以後的討 論中, 一但發現有好的性質, 我們都將回頭考慮這個性質是否在兩圖都具有的情況下, 保證 這兩個圖同構。

有了同構的概念, 子圖的概念可以加以修飾。我們說 H 爲 G 的一個子圖代表者 H 和 G 的某一子圖 (按原定義) 同構即可, 也就是說 G 中的某一部份和 H 的長像是 一模一樣 。例如, 我們可以說 P(Petersen Graph) 中有一個子圖 C_5 , 也可以說 P具有兩個不相交的 C_5 作爲它的子圖。

現在, 我們在考慮同構的另一種概念。如果將一個圖的點集合作一排列, 於是可以得到一 個點集合之間的1-1 映成之對應, 接下來要探討的是 : 這對應會是 G 到 G 的一個同 構對應 (Isomorphism) 嗎? 如圖 6 所示, (12) 這個排列是由 C_4 到 C_4 的一個 同構對應嗎? 顯然不是 (?) 。而 (12) (34) 卻是一個同構對應哩!所以在 S_4 中 的排列裡面有些是由 C_4 到 C_4 的同構對應, 而有些就不是, 這樣一來, 也可以用這個特性來研究圖的結構。

定義 5.5. (自同構 , Automorphism)

一個 $V(G)$ 的排列 φ 稱爲是 G 的一個自同構, 若且唯若 φ 爲由 G 到 G 的一個同構對應。

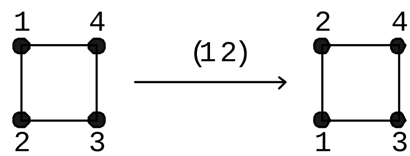


圖 6 : 不同構的對應

定理 5.6. (自同構群)

令 G 爲任意圖, 則所有 G 的自同構所成的集合對合成函數這個運算而言形成一個 群, 以 $Aut(G)$ 表示。

證明. (**作業**9.)

同樣地, 我們想知道若是 $Aut(G_1) = Aut(G_2)$ 可否推得 $G_1 \cong G_2$ 。不幸的是這個希望很快就落空了, 因爲下列兩個圖的自同構群顯然都 S_3 。

圖 7 : 具有一樣自同構群的兩個圖。

上述的例子顯然具有不一樣的度列 ; 也許我們可以繼續追問, 具有相同的度數列與自同構群 的兩個圖是否一定同構 (**作業**10.) 。

作業11. 若是 $G \cong \overline{G}$, 則稱 G 爲自補圖 (Self-Complementary) , 証明對於所有的 $p \equiv 0$ or $1 \pmod 4$, 皆存在一個 P 點圖 G , 它是 自補圖。

作業12. 令 $p \equiv 2$ or $3 \pmod 4$, 証明 $K_p - e$ 可以表成兩個 同構圖的聯集。

6. 特殊圖

這一節介紹一些比較常用的特殊圖。

(1) K_n：具有 n 個點的完全圖 (Complete Graph)。

(2) O_n：具有 n 個點的空圖 (沒有邊) 或者是 n 個孤立點。

(3) $K_{m,n} = O_m \vee O_n$：完全二分圖 (Complete Bipartite Graph)。

(4) $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = O_{n_1} \vee O_{n_2} \vee \ldots \vee O_{n_k}$：完全 k 分圖 (Complete k-partite)。

(5) 3 度圖 (Cubic Graph)：3-正則圖。

(6) $K_{m(n)} = O_n \vee O_n \vee \ldots \vee O_n$ (m-tuple)：平衡完全 m 分圖。

(7) C_n：每點度數均爲2 的 n 點連通圖。(n-圈, n-cycle)

(8) $K_{1,t}$：星圖。

(9) P_n：n 個點的路徑 (n-path)。

(10) $O_n \vee K_m$：完全分裂圖 (Complete Split Graph)。

作業13. 試求 8 個點所有不同構的 3-正則圖。

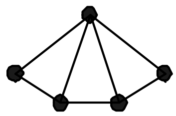
作業14*. 試證明不含 K_{11} 子圖的 100 個點中, 邊數最多的圖是 $K_{10(10)}$。

作業15*. 令 G 爲不含子圖 C_4 的 n 點圖, 則 $|E(G)|$ 最大是多少?

7. 可畫圖的數列 (Graphical Sequence)

定義 7.1. 一個遞減的非負整數數列稱爲是一個可畫圖的數列, 若且唯若存在有一個圖 G , 它的 度數恰爲此數列。

例 1 : (4,3,3,2,2) 爲一可畫圖的數列。



以下的定理提供了一個判斷是否一個數列爲可畫圖數列的方法。

定理 7.2. (Havel 和 Hakimi)

下列兩數列 $(s,\ t_1,\ t_2, ...,\ t_s,\ g_1,\ g_2, ...,\ g_n)$.......(1) 及 $(t_1-1,\ t_2-1, ...,\ t_s-1,\ g_1,\ g_2, ...,\ g_n)$................(2) 它們 的可畫性是一樣的。

證明.

如果 (2) 是可畫的數列, 令 G' 爲畫出來的圖。此時只要加入一點 v 讓它連到度數分 別爲 $t_1 - 1$, $t_2 - 1$,..., $t_s - 1$ 的點, 則新得到的圖之度數顯然是 (1) , 所以 (1) 爲可畫的數列。

反過來, 假設 (1) 是可畫的數列, 令 G 爲畫出來的圖, 其中 v 的度數爲 s 。假設 $V(G) = \{v,\ u_1,\ u_2, ...,\ u_s,\ w_1,\ w_2, ...,\ w_n\}$, 而且 u_1 , u_2 ,..., u_s 分別具有度數 t_1 , t_2 ,..., t_s , 又 w_1 , w_2 ,..., w_n 的度數分別爲 g_1 , g_2 ,..., g_n 。首先, 如果 $N_G(v) = \{u_1,\ u_2, ...,\ u_s\}$, 則 $G - v$ 的度數列恰爲 (2) , 所以 (2) 也是可畫圖的數列。不然的話, $u_1,\ u_2, ...,\ u_s$ 中必存在一 些點不在 $N_G(v)$ 中 ; 現在由 u_1 , u_2 ... , 往下看, 令 u_i 爲 第一個不在 $N_G(v)$ 中的點, 由於 $deg_G(v) = s$ 所以必存在一個 w_i , $v \sim w_i$ 。此時若是 $g_i = deg(w_i) = deg(u_i) = t_i$, 則將 u_i 從 集合 $\{u_1,\ u_2, ...,\ u_s\}$ 中去掉再加入 w_i , 此 $u_1,\ u_2, ...,\ u_{i-1},\ w_i,\ u_{i+1}, ...,\ u_s$ 比原來的 $u_1,\ u_2, ...,\ u_s$ 多一個落在 $N_G(v)$ 中的點 (步驟可以繼續進行) 。另一方面如果 $t_i > g_i$, 令 $w \in N_G(u_i) \setminus N_G(w_i)$。將 G 中的邊 vw_i 與 u_iw 去掉然後加入 vu_i 及 ww_i 而得到一個新 圖 G_1 此時 G_1 的度數列仍爲 (1) 不過在 G_1 中 $u_i \sim v$, 所以 $u_1,\ u_2, ...,\ u_s$ 中的點多一個與 v 相連。繼續同樣的工作 : 換 u_i 與 w_i , 或換邊製新圖 ; 直到 $u_1,\ u_2, ...,\ u_s$ 在圖中都和要 v 相連爲止。顯然, 在這個時候只要去掉 v , 就可得到一個圖, 它的度數列恰爲 (2) ,

也就是說 (2) 為可畫圖的數列。 ■

基本上, 定理 7.2 提供了一個簡單的演算法來判斷一個非負的遞減整數列是否為可畫圖數列 。然而, 就定性刻劃言這結果仍不太令人滿意, 以下是一個出名的定理, 它可以直接利用核對 的方式判斷出可畫圖數列。

定理 7.3. (Erdös 和 Gallai)

非負減數列 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_p)$ 為可畫圖數列的充要條件為:

(1)$\sum_{i=1}^{p} d_i$ 是偶數, 以及

(2) 對於所有的 $1 \leq n \leq p-1$, $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq n(n-1) + \sum_{i=n+1}^{p} min\{n, d_i\}$ 。

證明.

(⇒) (1) 顯然成立, 而 (2) 的部份可以從前面度數較大的 n 個點它們度數的 總和 S 看出來。這 n 個點之間, 任何一邊都會貢獻兩度給 S ; 而這 n 個點和 剩下點之間的連接總數可以由剩下的 $p-n$ 個點看它們連到這 n 個點的度數和來決定 這些點最多連到 n 個點, 若是度數小, 則甚至不到 n , 所以 (2) 式中 S 即可 求出上界。

(⇐) (摘要) 利用歸納法, 如果 $p = 2$, 則毫無疑問地, 只要 (1) , (2) 成立, $(d_1,\ d_2)$ 為可畫圖的數列, 假設滿足 (1) , (2) 的 k 項數列皆為可畫圖的 數列, 同時 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_{k+1})$ 為一滿足 (1) 及 (2) 的數列。現在固定 d_1 , 考慮 d_2 ,..., d_{k+1} , 令 m , m' 分別為最小及最大的正整 數使 $d_{m+1} = ... = d_{d_1+1} = ... = d_{m'}$ 。再來我們定義一個新的數列 $(e_1,\ e_2, ...,\ e_k)$ 其中在 $i = 1$ 到 $m-1$ 及 $m'-1-d_1+m$ 到 $m'-1$ 的情況下, 令 $e_i = d_{i+1} - 1$, 其它時候則令 $e_i = d_{i+1}$ 。接下來是核對 $(e_1,\ e_2, ...,\ e_k)$ 滿足 (1) 及 (2) (細節省略) 因此 $(e_1,\ e_2, ...,\ e_k)$ 為可畫圖的數列, 令此圖為 G' 則再加入一點 v , 將它連到上述的 $e_i = d_{i+1} - 1$ 所對應的點, 得到 G , 現在 G 的度數列為 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_{k+1})$, 這部份的證明於是完成。 ■

定理 7.3 之所以困難和我們所希望畫出是簡單圖有關, 如果我們可以將圖畫成重邊圖, 則刻劃上比較容易。

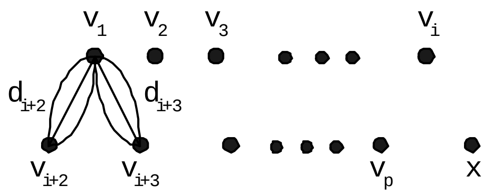
定理 7.4. (重邊圖的度數列)

一個遞減的非負整數列 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_p)$ 為可畫圖的數列, 若且唯若 (1) $\sum_{i=1}^{p} d_i = 2q$ 及 (2) $d_1 \leq q$ 。

證明.

必要條件是顯而易見, 現在我們利用直接建構的方式來證明充分條件。因爲 $d_1 \le q$, 令 i 爲最小的正整數使得 $d_1+d_2+...+d_{i+1} > q$ 而 $d_1+d_2+...+d_i \le q$ 。現在定義一個圖 G , 其中 $V(G) = \{v_1,\ v_2, ...,\ v_i,\ x,\ v_{i+2}, ...,\ v_p\}$, 而 G 的邊連接方法如下:

(1) 由 v_1 , v_2 開始到 v_i 分別連往集合 $\{x,\ v_{i+2}, ...,\ v_p\}$ 中的點, 使得點的度數能滿足原有的條件 $deg_G(v_1) = d_1,\ deg_G(v_2) = d_2,\ \cdots$, (除了 $deg_g(x)$) , 如下圖所示。



(2) 令 $e_i = q - \sum_{j=1}^{i} d_j$, 由於現在 $v_1,\ v_2,\ ...$, v_i 的度數 分別爲 d_1 , d_2 ,..., d_i , 所以圖中已經有 $\sum_{j=1}^{i} d_j$ 個邊。若是 $e_i = 0$, 則不必再連, 不然的話, 尚有 e_i 個邊要連 ; 接下來由 v_1 , v_{i+2} 開始, 將它們連到 x , 再去掉 $\{v_1, v_{i+2}\}$ 直到 x 的度數爲正確即可。(?) ■

如果我們同意圖中也可以有弧圈, 那麼可畫圖的數列就更多了。

定理 7.5. (擬圖的度數列 , Pseudograph)

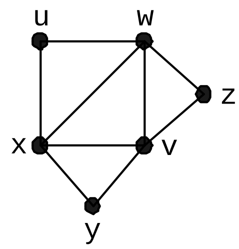
一個遞減的非負整數列爲一可畫圖數列的充要條件爲該數列的和是偶數。

證明. 作業16.

作業17* 給定理7.3 一個完整的證明。

8. 距離 (Distance)

在一個圖中, 任選兩點 u 和 v (可以是一樣的點) , 則由 u 經過與 u 相連的 邊, 然後再與經過與該邊相連的點, 一直到 v 爲止, 這樣的點邊序列稱爲是一個 $u-v$ 步行 (Walk) 。(爲了方便, 通常用點表示。例如在圖八中 $u-w-x-y-v$ 就是一個 $u-v$ 步行。) 顯然, 步行中同樣的的點可以重複出現, 於是邊也就可能重複。如果, 邊不重複, 這樣的步行稱爲是步徑 (Trail) ; 一個 $u-u$ 步徑也稱爲是迴路 (Circuit) 是封閉的步徑 (Closed Trail) 。現在, 如果點不重複出現, 則邊自然不會重 複出現, 這種步行稱爲是路徑 (Path), 路徑的長度就是以路徑上有多少邊來計算。一 般以 P_n 代表具有 n 個點的路徑, 當然它的長度就是 $n-1$ 了。另一方面, 一個 點不重複的迴路稱爲是圈 (Cycle) , 具有 n 個點的圈的記爲 C_n , 自然 C_n 上有 n 個邊, 在設計理論上則以 n-圈稱之。(註 : 有些書以 Circuit 代表 C_n , 而 Cycle 則代表 2-正則圖。)



圖八

定義 8.1. (距離 , Distance)

在一個圖 G 中, 兩點 u 與 v 的距離定義爲所有 $u-v$ 路徑中最短路徑的長度。如果 $u-v$ 無法用路徑相連則距離爲 $+\infty$, 另一方面點與自己的距離定義爲 0, 在 G 中 u 與 v 的距離記爲 $d_G(u,v)$ 。

值得一提的是距離可以看成是由 $V(G)\times V(G)$ 映至 Z 的函數, 而且 d_G 本身也是一個量度 (Metric) , 它滿足下列三個性質:

(1) $d_G(u,v)=d_G(v,u)$ 。
(2) $d_G(u,v)=0$ 若且唯若 $u=v$ 。
(3) $d_G(u,v)+d_G(v,w)\geq d_G(u,w)$ 。(三角不等式)

定義 8.2. (離心率 , Eccentricity)

一個點 v 在 G 的離心率為 $e_G(v) = max\{d_G(u,v)|u \in V(G)\}$ 。

定義 8.3. (直徑 , 半徑 ; Diameter , Radius)

一個圖的直徑與半徑分別定義成 $D(G) = max\{e_G(v)|v \in V(G)\}$ 與 $r(G) = min\{e_G(v)|v \in V(G)\}$ 。直徑基本上是指圖中最遠兩點的距離。

圖的直徑與半徑可能相差很大, 也可能相等 ; 但是以下的關係必然成立。

定義 8.4. 對於任意圖, $r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$ 。

證明.

左邊的不等式可由定義直接獲得 ; 右邊的不等式就不是那麼明顯。由於半徑是代表最小 的離心率, 所以令 v 它的離心率為 $r(G)$ 。再令 u , w 為圖中最遠的兩點, 也就 是 $D(G) = d_G(u,v) \leq d_G(u,v) + d_G(v,w) \leq 2r(G)$ 。

所以引理得證。 ■

在下述定理的證明中我們用到了離心率為半徑的點, 然這些點會落在圖的中央部份 (直觀) , 於是就形成了以下的定義及研究問題。

定義 8.5. 在圖 G 中,G 的中心 (Center) $Z(G)$ 就是所有離心率等於半徑的點所成的集合。

問題: 圖的中心長像如何?

作業18. 試給出無窮多個圖 G , 使得 $D(G) = 2r(G)$ 。

作業19. 試給出無窮多個圖 H , 使得 $D(H) < 2r(H)$ 。

定義 8.6. (連通圖 , Connected Graph)

直徑為有限的圖 (有限圖) 稱為是連通圖, 也就是說在連通圖中任意兩點都可以用一條路 徑將它們連接起來。(無窮圖可以用後者當定義。)

定義 8.7. (樹圖 , Tree)

具有最少邊數的連通圖稱為是樹圖。

引理 8.8. 若是 G 爲一連通圖, 則 $E(G) \geq |V(G)| - 1$ 。

證明.

利用數學歸納法證明, 顯然當 $|V(G)| = 1$ 或 2 時原敘述成立。

假設 $|V(G)| = n$ 時敘述亦成立, 即 $|E(G)| \geq n-1$ 。令 H 爲任意的連通圖, 而 且 $|V(H)| = n+1$ 。設 v 爲 H 中的任一點, 而且 $N_H(v) = \{u_1,\ u_2, ...,\ u_t\}$ 。現在考慮 $G' = (H-v)\bigcup P$, P 爲路徑 $u_1 - u_2 - ... - u_t$ 。則 G' 爲具有 n 點的連通圖, 所以 $|E(G)'| \geq n-1$, 這表示 $E(H) \geq (n-1) - (t-1) + t = n$, 定理得證。 ■

引理 8.9. 若是 G 爲一樹圖, 則 G 中不合任何圈 (爲其子圖) 。

證明.

去掉圈上任何一邊不會影響它的連通性質。 ■

引理 8.10. 樹圖 G 恰有 $|V(G)| - 1$ 個邊。

證明.

利用數學歸納法證明 $E(G) \geq |V(G)| - 1$ 。

顯然, 當 $|V(G)| = 1$ 或 2 時, 不等式成立。假設 $|V(G)| = n$ 時不等式亦成立。令 H 爲具有 $n+1$ 個點的樹圖。首先, 我們知道 H 中必存在有一點 v , 它的度數爲 1, 否則 H 必含一圈 (?) , H 不是樹圖 ; 令 $G' = H - v$ 。則 G' 是樹圖 (?) , 所以 $|E(G')| \leq n-1$, 於是 $|E(H)| \leq n$, 定理得證。 ■

推論 8.11. 樹圖中至少有兩點它們的度數是 1。

推論 8.12. 樹圖中的任意相異兩點皆存在有唯一的路徑連接這兩點。

推論 8.13. 令 G 爲一樹圖而且 $d_G(u,v) = D(G)$, 則 $deg_G(u) = deg_G(v) = 1$ 。

引理 8.14. 令 G 爲一樹圖。則對於任意不相連的兩點 u , v , $G + \{u,v\}$ 必含一圈, 同 時在 G 中必存在一邊 e 使得 $G + \{u,v\} - e$ 爲一樹圖。

證明.

令 e 爲 $G+\{u,v\}$ 中圈上的一邊 (異於 $\{u,v\}$) 。 ■

定義 8.15. (懸掛子圖 , Spanning Subgraph)

若 $H \leq G$ 而且 $V(H) = V(G)$, 則 H 稱爲是 G 的懸掛子圖。

定義 8.16. (懸掛樹)

若 H 爲 G 的懸掛子圖, 而且 H 本身爲一樹, 則稱爲是 G 的懸掛樹。

引理 8.17. 任意連通圖必含一懸掛樹。

證明.

將圈上的邊逐一去掉, 但是要維持連通性。

(註) 樹可以看成是不含任何圈 (Acyclic) 的連通圖。

定義 8.18. (森林 , Forest)

不含任何圈的圖稱爲是森林。

定義 8.19. (部份 , Component)

以"$\leq$"爲關係的最大連通子圖稱爲是一個圖的部份。一個圖 G 的部份的個數以 $c(G)$ 表示。$c(G) = 1$ 的圖 G 就是一個連通圖, 孤立點也可看成是一個部份。

定義 8.20. (橋 , Bridge (狹義))

在一個圖 G 中, 若 $c(G-e) > c(G)$, 則 e 稱爲是 G 的一個橋。

在圖的分割中, 橋可以定義成另一種比較廣義的圖 ; 但是就上述的定義而言, 實際上若 e 是橋, 則 $c(G-e) = c(G)+1$ 。

引理 8.21. G 爲樹圖, 若且唯若 G 爲連通圖而且每一邊都是橋。

定理 8.22. 下列的敍述彼此等價 :

(1) G 爲樹圖。

(2) G 是不含任何圈的連通圖。

(3) G 是恰有 $|V(G)|-1$ 邊的連通圖。

(4) G 是不含任何圈而且具有 $|V(G)|-1$ 邊的圖。

(5) G 中的任兩點皆有唯一的一條路徑相連。

(6) G 爲連通圖而且每一邊都是橋。

(7) 對於 G 中不相連的兩點 u , v , $G+\{u,v\}$ 必含唯一的一個圈。

證明. 作業20.

作業21. 令 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_t)$ 爲一連通圖的度數列, 則 d_i 之間 有什麼關係? 證明你所提供的答案。

作業22. 證明一個遞減正整數列 $(d_1,\ d_2, ...,\ d_t)$ 爲一個樹圖 G 的度數列之充條件爲 $\sum d_i = 2(p-1)$ 。

9. 有向圖 (Digraph)

有向圖的點和一般圖一樣, 它的邊則用點與點之間所形成的有向序對來取代 ; 所以有向邊 (u,v) 與 (v,u) 是不同的兩邊, 爲了區分有向邊及一般邊, 有向邊一般以弧 (arc) 稱之。圖 D 的弧的集合就用 $A(D)$ 表示。

定義 9.1. (內度與外度 , Indegree & Outdegree)
一個點 v 在有向圖 $D=(V,A)$ 中的內度 $id_D(v)=|\{u|(u,v)\in A\}|$, 而外度 $od_D(v)=|\{w|(v,w)\in A\}|$ 。

所以, 下面的結果就不難想像。

引理 9.2. 在一個有向圖 D 中, $|A(D)|=\sum id_D(v)=\sum od_D(v)$ 。

因此, 要考慮一個有向圖的度數列, 要同時表示出內度與外度, 而度數的大小順序也只能根據 其中一種來考量 ; 一般以外度爲主。令 $s_1,\ s_2,...,\ s_p$ 爲有向圖 D 的外度遞減數列, 而內度依序爲 $t_1,\ t_2,...,\ t_p$, 則 D 的度數列爲 (s_1,t_1) , (s_2,t_2) ,..., (s_p,t_p) , 於是我們可 以得到以下出名的定理 :

定理 9.3. (Fulkerson - Ryser)
一個非負整數列 (s_1,t_1) , (s_2,t_2) ,..., (s_p,t_p) , $s_1\geq s_2\geq ...\geq s_p$, 爲可畫之有向圖的數列, 若且唯若對 於所有的 $1\leq i\leq p$,
(1) $s_i\leq p-1$ 且 $t_i\leq p-1$ 。
(2) $\sum_{i=1}^{p}s_i=\sum_{i=1}^{p}t_i$, 以及
(3) 對於所有的 $1\leq n\leq p$, $\sum_{i=1}^{n}s_i\leq\sum_{i=1}^{n}min\{n-1,t_i\}+\sum_{i=n+1}^{p}min\{n,t_i\}$。

這個定理分別由 Fulkerson 及 Ryser 獨立發現 (1960 左右) , 證明的方式與前面 Erdös-Gallai 定理相以, 以下就其必要性加以說明, 如此對有向圖的結構也可以 有多一些的了解 ; 充分性的部份請自行參考文獻或自己加以證明。

定理 9.3. 的必要性
外度最大的 n 個點 $v_1,\ v_2,...,\ v_n$ 之外度和, 實際上就等於這些點所 連接到的點之內度和。現在 v_{n+1} 到 v_p 它們的內度和 (來自 $v_1,\ v_2,...,\ v_n$) 最多爲 $\sum_{i=n+1}^{p}min\{n,t_i\}$, 而在 $v_1,\ v_2,...,\ v_p$ 來自 $v_1,\ v_2,...,\ v_n$ 的內度和最多爲 $\sum_{i=1}^{n}min\{n-1,t_i\}$, 因此 (3) 成立。(1) , (2) 一般稱爲明顯的必要條件,

證明省略。 ■

一個有向圖之連通性一般分成兩種, 一種是根據它的結構 (不考慮方向) , 如此一來這個圖可能是一個重邊圖 (最多二重邊) ; 我們稱此有向圖爲弱連通圖 (Weakly Connected) , 若且唯若在不考慮 方向 (即 $(u,v) \to \{u,v\}$) 的情況下此圖爲連通圖。另一方面, 如果圖中的 任兩點 u , v , 均存在一個有向路徑, $u = v_0 - v_1 - v_2 - ... - v_t = v$ 連接 u , v , 即對於所有的 $0 \leq i \leq t-1$, (v_i, v_{i+1}) 爲圖上的弧, 則此圖稱爲是強連通圖 (Strongly Connected) 。顯然, 在網路上這種圖是最受歡迎的。值得注意的是 : 在有向圖中, 一般討論有路徑相連是指有向路徑, 而連通與否也決於是否位兩 點都存在有向路徑相連。

作業23. 令 D 爲一有向圖它滿足任意 $V(D)$ 中的兩 u , v , 不是 $(u,v) \in A(D)$ 就是 $(v,u) \in A(D)$ 。證明在 D 中必存在一條有向路徑, 由一點 出發到另一點而且通過 $V(D)$ 中的其它所有點。(註) 上述所提到的有向圖有稱爲是競賽圖 (Tournament) 。

作業24. 在一競賽圖中, 外度最大點稱爲王點 (King) , 試給一"條件"使得王點 唯一存在。

10. 加權圖 (Weighted Graph)

一個加權圖是指一個一般圖再加上定義於 $V(G)\bigcup E(G)$ 上的一個加權函數 w 。在應用上, 大部份的加權都是在邊上, 所以 w 可以看成是由 $E(G)$ 映至某個集合的函數 ; 這個時候, 如果有所有比較大小的加權, 則 $w: E(G) \to R$, 不然 的話, 其它如 $(+,-)$ 亦可。以下我們就探討一個與大小有關的問題, 令 (G,w) 爲一加權 圖, 其中 $w: E(G) \to R^+$ 。現在考慮以下的問題 :

問題 : (**最小懸掛樹** , Minimum Spanning Tree)

在一個連通的加權圖中, 如何找到一估懸掛樹, 使得它的邊上之加權總和爲最小?

如果我們把邊上的加權看成是在網路上維持該邊的成本, 則最小懸掛樹是指一種在維持 連通的前提之下使得成本最低的連接方法。由於圖的變化很大, 要找出一個定性的方法 直接計算加權或直接求得答案並不容易, 於是演算法成爲最有力的工具。

找最小懸掛樹的演算法 (Kruskal)

任給一個連通的加權圖 (G,w)。

步驟 1. 令 $i=0$ 以及 $E_0=\phi$。

步驟 2. 在圖 G 中選一邊 e_i 不在 E_{i-1} 且而 $w(e_i)$ 爲最小, 使得 $T_i =< E_{i-1}\bigcup\{e_i\} >$ (邊導出子圖) 不含任何的圈, 同時定義 $E_i = E_{i-1}\bigcup\{e_i\}$ 。若是找不到這種 e_i , 則令 $T =< E_{i-1} >$ 並且停止演算法。

步驟 3. 用 $i+1$ 取代 i , 同時回到步驟 2。

綜合上述三個步驟, 基本上演算法的過程是不斷地加入加權最小 (未用) 的邊, 同時維持 圖上沒有圈即可。

定理 10.1. 上述 Kruskal 的演算法的確可以在任意的連通加權圖中找到最小的懸掛樹。

證明.

令 (G, w) 爲給定的加權圖, 由演算法不難看出最後求出來的答案 T 必定是 G 的懸掛樹, 所以 $V(T) = V(G)$, 而且 $|E(T)| = |V(G)| - 1$ 。

令 $E(T) = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_{p-1}\}$, 同時 $w(T) = \sum_{i=1}^{p-1} w(e_i)$ 。現在, 假設 T 不是最小的懸掛樹, 於是在 G 中可以找到其它的最小懸掛樹, 它的總 加權小於 $w(T)$ 。令 H 是其中一個最小懸掛樹它與 T 有最多的共用邊。由於 $E(H) \neq E(T)$, 令 e_i , $1 \leq i \leq p-1$, 爲一個在 $E(T) \setminus E(H)$ 的 邊 (由 1,2,..., 看起) 。由樹的性質, 我們知道 $H \bigcup \{e_i\}$ 必含一圈, 而 且在這一圈上必含一邊 e_0 不屬於 $E(T)$ 。令 $T' = (H \bigcup \{e_i\}) \setminus \{e_0\}$, 則 T' 也是 G 的一個懸掛樹, 同時 $w(T') = w(H) + w(e_i) - w(e_o)$ 。

由於 H 爲最小懸掛樹, 所以 $w(H) \leq w(T')$, 因此 $w(e_i) \geq w(e_0)$, 另一方面, 由演算法 $w(e_i) \leq w(e_0)$ (?) , 所以 $w(e_i) = w(e_0)$, 這麼一來 $w(H) = w(T')$, T' 也是最小懸掛樹。然而 $|E(T') \bigcap E(T)| > |E(H) \bigcap E(T)|$, 這與假設矛盾, 所以 T 應該就是最小的懸掛樹。 ■

除了 Kruskal 的演算法之外, 尚有其它類似的演算法也可以求出最小的懸掛樹。

方法 2. 去掉加權最大的邊只要連通性可以維持即可。

方法 3. 任選一點 x_1 , 然後在 x_1 的鄰域中選一點 x_2 使得 $w(\{x_1, x_2\})$ 爲最小, 接著再看 $N(x_1) \bigcup N(x_2) \setminus \{x_1, x_2\}$, 再選 能加入的最小加權邊 ; 再繼續擴充考慮尚未選過的"點", 最後獲得一最小懸掛樹。

作業25. 證明方法 2 及方法 3 皆可以求得最小懸掛樹。

11. 圖的表示法

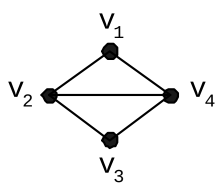
圖固然可很容易地畫出來, 但是畫法很多而且儲存不便, 因此, 適當地將圖轉換成其它 形式表示出來, 也很重要。

定義 11.1. (相鄰矩陣 , Adjacency Matrix)

一個圖 G 相鄰矩陣 $A(G)$ 爲一 $p{\times}p$ 的方形矩陣, 其中 $V(G)=\{v_1,v_2,..,\ v_p\}$, 同時在 $v_i\sim v_j$ 時 $A(i,j)=A(j,i)=1$, 且 $A(i,i)=0$ 。

於是, 同構的圖自然就會有對應的相鄰矩陣在適當的換行 (對稱) 之後得到相同的矩陣。

例 1 :



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

圖的相鄰矩陣提供了相當多資訊來研究圖的性質: 由於矩陣的行列都是對應到固定的點, 所以第 i 列表示的就是與 v_i 相關, 同理第 j 行與 v_j 相關。

引理 11.2. 令 A 爲 G 的相鄰矩陣, 則 $A^n(i,j)$, 矩陣 A^n 的 (i,j) 位置所得到 的值就是在圖 G 中由 v_i 到 v_j 不同的 n-步步行方法數。

證明.

由歸納法可以很快證明出來。 ■

引理 11.3. 令 $C_n(G)$ 代表在圖 G 中不同 n-圈之個數, 則

(1) $C_3(G)=\frac{1}{6}tr(A^3)$ 。

(2) $C_4(G)=\frac{1}{8}[tr(A^4)-2q-2\sum_{i\neq j}A^2(i,j)]$ 。

(3) $C_5(G)=\frac{1}{10}[tr(A^5)-5tr(A^3)-5\sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{p}A(i,j)-2)A^3(i,i)]$ 。

證明.

$A^3(i,i)$ 代表者從 i 經過 3 步 (邊) 回到原地 i 的相異步行數。由於同一三 角形將被算到 6 次這樣的步行數, 所以可以求出 (1) 。在 (2) 的部份,4 步回到原地的方法有很多, 不形成 4 邊形都需要古掉 ; 譬如一個邊來回各走了兩次, 或都是有兩個相鄰邊, 一邊走兩次 另一邊也走兩次, 所以求得 (2) ; (3) 就要更複雜一些, 細節在此省略。 ■

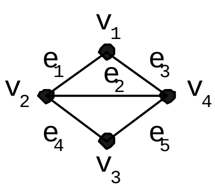
另外, 我們也可以看到利用相鄰矩陣本身的性質, 例如求出該矩陣的特徵值譜 (Spectrum) , 來刻劃一個圖, 這種概念我們留在後面再詳細介紹。

除了相鄰矩陣之, 相接 (Incidence) 矩陣也是很重要表示法。

定義 11.4. (相接矩陣)

令 $G=(V,E)$, 其中 $V=\{v_1,\ v_2,...,\ v_p\}$, $E=\{e_1,\ e_2,...,\ e_q\}$, 則相接矩陣 $B(G)$ 爲一 $p\times q$ 矩陣, 其中若是 v_i 爲 e_j 的一個 端點則 $B(i,j)=1$, 不然的話 $B(i,j)=0$ 。

例 2 :



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

顯然, 在 $V(G)$ 中任一行都恰有兩個 1, 而每一列 1 的個數, 恰爲對應點的度數, 因此 以下的性質就不難看出來。

引理 11.5. 令 $L(G)$ 爲圖 G 的邊圖 (Line Graph) , 則 $A(L(G))=B(G)^TB(G)-2I_q$ 。

證明.

$B(G)^TB(G)$ 中不爲零的位置 (i,j) 表示 e_i 與 e_j 有共同點, (當 $i=j$ 時有兩點, 不再考慮範圍) , 故得證。 ■

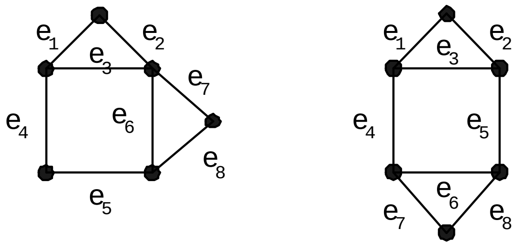
和相鄰矩陣一樣, 相接矩陣也能完全描述原圖的性質, 接下來我們再看一種描述圖的 矩陣, 它雖然也有不錯的性質, 卻無法說出圖的眞正結構。

定義 11.6. (圈矩陣 , Cycle Matrix)

令 C_1 , C_2 ,..., C_m 爲圖 G 中的 m 個圈, 則圈矩陣 $C(G)$ 爲 一個 $m \times q$ 的矩陣, 其中第 i 列上的 1, 表示 C_i 所經過的邊, 如例3。

例 3 :

$$
\begin{array}{c}
\\
c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



上例中, 不同構的兩個圖卻有著相同的圈矩陣, 這種現像對於沒有圈的圖就更明顯了 ; 所以, 圈矩陣是無法被用來刻劃一個圖, 然而, 它有些不錯的性質, 以下是其中之一 :

引理 11.7. 令 B , C 分別爲 G 的相接矩陣及圈矩陣, 則 $CB^T \equiv 0 \pmod 2$ 。

證明.

由於 $CB^T(i,j)$ 是表示第 i 個圈與點 x_j 的關係, 而 x_j 出現在圈 的兩邊, 所以 $1+1 \equiv 0 \pmod 2$, 引理得證。 ■

另外一個比較難一點的性質是有關矩陣的階數 (rank) 。(向量空間佈於 $GF(2)$.)

定理 11.8. 令 B , C 分別爲連通圖 G 的相接與圈矩陣, 則 $rank(B) = |V(G)| - 1$, $rank(C) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 。

證明.

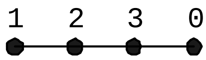
由於 B 的列和爲零, 所以 $rank(B) \leq |V(G)|-1$ 。加上 G 至少有 $|V(G)|-1$ 個邊, 所以至少有 $|V(G)|-1$ 個獨立的列, 這表示 $rank(B) \geq |V(G)|-1$, 因此得到 B 的階數。$rank(C)$ 爲何是 $|E(G)|-|V(G)|+1$ 顯然與去掉 G 中的 多少仍然是連通圖有關, 詳細的證明留給讀者自行完成。(**作業**26.) ■

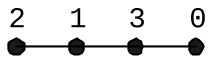
在知道 $rank(C)=|E(G)|-|V(G)|+1$ 之後, 我們自然求得一個以 G 爲母圖所生成出來的 一個向量空間, 它也稱爲是 G 的圈空間 (Cycle Spae) 而上述的階數一般也稱爲是 G 的貝蒂數 (Betti Number) , 即爲 $\beta(G)$ 。

作業27. 就例 3 的圖 (a) 找到一個該圖圈空間的基底。

以上表示法都是指無向圖, 如果是有向圖 D , 則在 $(v_i, v_j) \in A(D)$ 的情況對, 令 (v_i, v_j) 位置填入 1, 而 (v_j, v_i) 是否爲 D 的一個弧就 可以另行決定 (v_j, v_i) 填入的是 1 或是 0。這麼一來有向圖的相鄰矩陣也可以 對應地寫出來, 只是這矩陣就不一定是對稱了。不論對稱與否, 利用特徵值來研究圖的特性 都可以照樣進行, 此時, 可能會有複數成爲有向圖的特徵值。

另外, 在圖上邊很少的時候 (接近 $O(n)$) , 也可以用表列法, 將邊一一列出即可, 在電腦資料的儲存, 這可能比一個完整的矩陣更節省空間與時間。

作業28*. 令完全圖 K_n 的點集合爲 $\mathbb{Z}_n$, 証明 K_n 中不 同的懸掛樹有 n^{n-2} 個。(註) 例如在 K_4 中, 

與 

是不同的懸掛樹。(兩種不同方法。)