Discrete Math, Test(III)

2009.6.17

1-7，每題 15 分

1. 在正方形的四個格子上塗顏色，試求在三種顏色可以使用的情況下有多少種不同形式的塗法。（旋轉之後相同屬同一型式。）

2. 如果項鍊式只考慮旋轉之後相同才算同型，問用紅、黃、藍三種顏色一共六個寶石，所串成的項鍊有多少種型式。

3. 建構一個線性碼，長度 n = 7，維度 k = 4 以及距離 d = 3。

4. 證明在一個（n, k, d）線性碼中，必滿足 $d \le n - k + 1$。

5. 在 $x^{15} = 1$ 的前提下，證明 $C = \{ f(x) : f(x)$ 爲 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ 的倍式$\}$ 爲一線性碼，其中 n = 15，k = 11，$d \ge 3$。

6. 試設計五個 Tests 使得在同時測試的情況下可以在 32 個物件中找到一個壞的物件。

7. 在一個具有 9 個點的圖中，已知有兩個連邊，試問如何測試可以在最少次的 Tests 中找到那兩邊。

8. 寫出你(妳)認爲離散數學課中最吸引你的重要結果並說明理由。

Solution of discrete math test(III)

1.

Use Burnside's lemma. There are 3^4 patterns fixed by rotating $0°$. Only 3 patterns are fixed after rotating $90°$, so is rotating $270°$. There are 3^2 patterns fixed by rotating $180°$. Thus we have

$\frac{3^4+3+3^2+3}{4} = 96/4 = 24$.

2.

Use Burnside's lemma. There are 3^6 patterns fixed by rotating $0°$. 3 patterns fixed by rotating $60°$. 3^2 patterns fixed by rotating $120°$. 3^3 patterns fixed by rotating $90°$. 3^2 patterns fixed by rotating $240°$. 3 patterns fixed by rotating $300°$. Thus we have

$\frac{3^6+3+3^2+3^3+3^2+3}{6} = 780/6 = 130$.

3.

Let the parity check matrix H be $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

and $\mathbf{C} = \{\overrightarrow{c} \in \mathbb{Z}_2^7 | \overrightarrow{c} H = \overrightarrow{0}\}$, then $\mathbf{C}$ is a $(7, 4, 3)$-code.

4.

Consider its parity check matrix H. Since H has order $n \times (n-k)$, $rank(H) \leq n-k$, i.e. at most $n-k$ rows in H are linear independent. Since $d(C) = d$, i.e. weight of codewords are at least d, thus any $d-1$ rows of H are linear independent. Therefore $d-1 \leq n-k$, and $d \leq n-k+1$.

5 在$x^{15}=1$的前提下，證明$C=\{f(x): f(x)$爲$x^4+x^3+x^2+x+1$的倍式$\}$爲一線性碼，其中 n = 15，k = 11， $d\geq 3$ 。

Solution:

$$If\ \ g(x), h(x)\in C, then\ x^4+x^3+x^2+x+1\,|\,g(x)\ and\ x^4+x^3+x^2+x+1\,|\,h(x).$$

Hence $x^4+x^3+x^2+x+1\,|\,g(x)+r(x)h(x)\ where\ r(x)\in Z_2[x].$

因此, C 是一個 linear code.

因爲 $x^{15}=1\ and\ \deg(x^4+x^3+x^2+x+1)=4$, 所以 n = 15, k = 11.

6 試設計五個 Tests 使得在同時測試的情況下可以在 32 個物件中找到一個壞的物件。

Hint: 利用

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

The outcome vector 所對應的那一行就是要找的,如果都沒有,則就是 32.

7. 在一個具有 9 個點的圖中，已知有兩個連邊，試問如何測試可以在最少次的 Tests 中找到那兩邊。

Hint:

一個九個點的圖共有 36 個邊, 所需的次數$\geq \log_2\binom{36}{2}$.